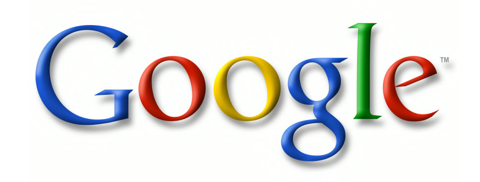
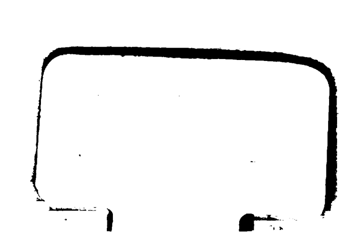




COURS D'ALGÈBRE

COURS
D'ALGÈBRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE SUPÉRIEUR

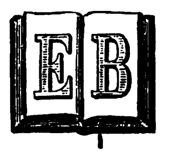
PAR

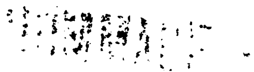
M. H. ANDOYER,

MAITRE DE CONFÉRENCES ET CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

OUVRAGE RÉDIGÉ

conformément aux programmes officiels de 1893





PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

BELIN FRÈRES

RUE DE VAUGIRARD, 52

1896

SAINT-CLOUD. — IMPRIMERIE BELIN FRÈRES.

PRÉFACE

Ce cours d'algèbre élémentaire complète la série des volumes que nous avons écrits pour l'enseignement primaire supérieur : il a été rédigé dans le même esprit que les précédents.

Les matières qui le composent doivent être, d'après le programme, réparties sur les deux dernières années d'enseignement ; le professeur devra donc distinguer avec soin, même dans la première partie du cours, celle qui s'étend jusqu'aux équations du second degré, les explications ou les théories qui s'adressent plus particulièrement aux élèves de troisième année : nous avons facilité ce choix par l'usage des petits caractères.

J'ai introduit les nombres négatifs par la considération des grandeurs susceptibles d'être mesurées dans deux sens différents, et je n'ai pas craint de faire tout d'abord une théorie complète des segments, bien que cette théorie ne soit pas indispensable. De cette façon les élèves comprendront mieux, je l'espère, la véritable nature et l'usage des nombres négatifs : à toute opération sur ces nombres, ils attacheront immédiatement l'idée d'une opération correspondante sur des grandeurs concrètes.

J'ai développé peut-être trop longuement la théorie des expressions algébriques : mais c'est qu'il est impossible de dire les quelques généralités nécessaires sur les équations sans avoir fait cette théorie avec quelques détails.

Dans la première année d'enseignement de l'algèbre, il sera bon, d'ailleurs, d'insister le moins possible sur la partie théorique du calcul algébrique, et sur les principes généraux relatifs aux équations. Il suffira de quelques exemples pour montrer aux élèves comment l'on résout les équations simples que seules ils doivent rencontrer.

J'ai donné de nombreux exemples de problèmes ; et j'espère avoir suffisamment montré que, pour résoudre un pro-

blème, il ne faut pas se contenter de résoudre les équations de ce problème : ce n'est là qu'une petite partie de la tâche; la plus importante est la discussion.

J'ai placé à la fin de ce volume une table de logarithmes des nombres, une table d'antilogarithmes et une table des logarithmes des lignes trigonométriques : toutes ces tables sont à quatre décimales, et cette approximation est le plus souvent suffisante dans la pratique. J'ai montré aussi comment on pourrait calculer de telles tables : je crois en effet que ce n'est qu'après avoir calculé directement le logarithme d'un nombre en partant des progressions fondamentales que l'on comprend bien ce que sont les logarithmes.

Enfin, j'ai décrit avec soin, comme l'exige le programme, la règle à calcul, et j'ai montré quels sont les problèmes qu'elle permet de résoudre : mais je crois que l'usage de cette règle n'est vraiment avantageux que s'il s'agit de répéter un grand nombre de fois un même calcul dont les données changent en partie ou totalement; dans tout autre cas, je préfère l'emploi d'une table de logarithmes à quatre décimales : une pareille table n'est ni coûteuse ni encombrante, et donne une précision supérieure presque toujours suffisante.

H. ANDOYER.

24 novembre 1895.

COURS D'ALGÈBRE

LIVRE PREMIER

NOMBRES ALGÉBRIQUES
CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DES SEGMENTS

§ 1er. — Notions préliminaires.

1. — L'*algèbre* est un des prolongements naturels de l'arithmétique : elle enseigne les moyens de résoudre les questions sur les nombres dont la solution ne se présente pas immédiatement comme application de la théorie des opérations, ou de la théorie des grandeurs proportionnelles.

Aussi ne faut-il pas chercher à établir une ligne de démarcation absolument précise entre l'arithmétique et l'algèbre; comme le montrera suffisamment la suite, ces deux sciences empiètent en plus d'un point l'une sur l'autre.

2. — Nous avons étudié en arithmétique les *nombres arithmétiques :* la simple idée de collection nous a conduits aux nombres entiers; la considération des longueurs quelconques comptées sur une droite indéfinie, et comparées à une longueur fixe appelée unité, nous a menés ensuite aux nombres fractionnaires, puis aux

nombres incommensurables, ce qui nous a permis de traiter la question de la mesure des grandeurs en général.

En envisageant encore des longueurs quelconques portées sur une droite indéfinie, et en tenant compte de ce fait que ces longueurs peuvent être parcourues par un mobile en deux sens différents, nous introduirons de nouveaux nombres, les *nombres algébriques*.

§ 2. — Définition et comparaison des segments.

3. — Soit une droite indéfinie X'X (*fig.* 1), et sur cette droite deux points A et B; la portion de droite

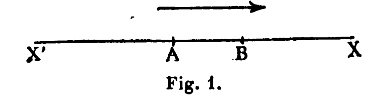


Fig. 1.

limitée par ces deux points est une *longueur*, que l'on représente indistinctement par AB ou BA; les points A et B sont les deux *extrémités* de cette longueur.

Si nous imaginons que la portion de droite limitée par les points A et B est parcourue par un mobile dans un certain sens, de A vers B par exemple, nous l'appellerons alors un *segment*, et nous le représenterons par la notation $\overline{AB}$, qui s'énonce : *segment* AB. Le point A est l'*origine* du segment $\overline{AB}$, le point B en est l'*extrémité :* la lettre qui marque l'origine est celle qui s'écrit et s'énonce la première. La *longueur* du segment $\overline{AB}$ est la longueur AB.

De même le segment $\overline{BA}$ a pour origine le point B, pour extrémité le point A ; sa longueur est encore AB.

Pour faciliter le langage, nous remarquerons que la droite X'X peut être parcourue par un mobile dans deux sens différents, dans le sens X'X ou bien dans le sens XX' ; nous choisirons alors arbitrairement l'un de ces sens, le sens X'X par exemple, et nous l'appellerons *sens positif* sur la droite X'X : l'autre, c'est-à-dire le sens XX', sera le *sens négatif* sur la droite X'X.

Sur la figure, le sens positif est indiqué par une flèche : il sera entendu, une fois pour toutes, que nous ferons de même dans tous les cas analogues.

Ceci posé, nous dirons d'un segment parcouru sur la droite X'X qu'il est *positif* ou *de sens positif*, s'il est parcouru dans le sens positif sur cette droite, et *négatif* ou *de sens négatif* dans le cas contraire. Le segment $\overline{AB}$ est positif, le segment $\overline{BA}$ est négatif.

Remarque. — Il faut observer avec le plus grand soin que les mots *longueur* et *segment* ont maintenant des sens précis et distincts, tandis qu'en géométrie élémentaire on les emploie indifféremment l'un pour l'autre; la même remarque s'applique à l'expression *extrémité d'un segment*. Il sera facile cependant, avec un peu d'attention, d'éviter toute ambiguïté.

4. — Un segment *nul* est un segment dont l'origine coïncide avec l'extrémité. Il se représente par O.

Deux segments sont *égaux* s'ils ont même longueur et si en outre ils sont de même sens. C'est ainsi que, les

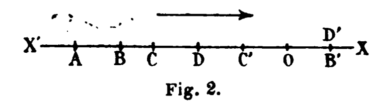


Fig. 2.

longueurs AB et CD étant égales (*fig.* 2), les deux segments positifs $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont égaux; il en est de même des deux segments négatifs $\overline{BA}$ et $\overline{DC}$.

Deux segments sont *symétriques* s'ils ont même longueur, et si en outre ils ont des sens différents. Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$, le premier positif, le second négatif, sont symétriques; il en est de même des segments $\overline{BA}$ et $\overline{CD}$.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont aussi symétriques.

Remarque. — Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ étant égaux, transportons-les par glissement le long de X'X, de façon à leur donner une même origine quelconque O; il est clair que leurs extrémités B et D viendront alors occuper

des positions B′ et D′ qui seront en coïncidence; et réciproquement.

Les segments $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ étant symétriques, transportons-les comme précédemment, de façon à leur donner une même origine quelconque O; leurs extrémités B et C viendront alors occuper des positions B′ et C′ qui seront symétriques l'une de l'autre par rapport au point O; et réciproquement.

5. — Les propositions suivantes sont évidentes :

1° *Deux segments égaux tous deux à un troisième segment sont égaux entre eux.*

2° *Deux segments symétriques d'un même segment sont égaux entre eux.*

3° *Deux segments, l'un égal à un troisième segment, l'autre symétrique de ce troisième segment, sont symétriques l'un de l'autre.*

On verra encore que deux segments symétriques de deux segments symétriques l'un de l'autre, sont eux-mêmes symétriques l'un de l'autre; et ainsi de suite.

6. — Soient deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$; faisons-les glisser tous deux le long de X′X, de façon à leur donner une même origine quelconque O; leurs extrémités B et D occuperont alors des positions B′ et D′.

Si B′ et D′ coïncident, c'est-à-dire si le segment $\overline{B'D'}$ est nul, les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont égaux, d'après ce qui précède, et l'on écrit :

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

X′ C D A B O B′ D′ O_1 B'_1 D'_1 X

Fig. 3.

Si le segment $\overline{B'D'}$ est positif (*fig.* 3), on dit que le segment $\overline{AB}$ est *plus petit* que le segment $\overline{CD}$, ou que $\overline{CD}$ est *plus grand* que $\overline{AB}$, et l'on écrit :

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \text{ou} \quad \overline{CD} > \overline{AB}.$$

Si le segment $\overline{B'D'}$ est négatif (*fig.* 4), on a de la même façon :

$$\overline{AB} > \overline{CD}, \quad \text{ou} \quad \overline{CD} < \overline{AB}.$$

X' C D A B O D' B' O_1 D'_1 B'_1 X

Fig. 4.

Nous n'insisterons pas davantage sur l'emploi de ces signes d'égalité ou inégalité qui sont ceux de l'arithmétique.

Il est clair que, ainsi qu'il est nécessaire pour que nos définitions soient légitimes, on arriverait aux mêmes conclusions en faisant glisser les segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ de façon à leur donner une autre origine quelconque O_1 : en effet, si alors B et D viennent en B'_1 et D'_1, les figures OB'D', $O_1B'_1D'_1$ sont égales au sens géométrique, O_1 pouvant être amené en coïncidence avec O, B'_1 avec B', D'_1 avec D', simultanément, par simple glissement.

7. — Les définitions que nous venons de donner entraînent les conséquences particulières suivantes :

1° *Un segment positif est supérieur à tout segment nul ou négatif; un segment négatif est inférieur à tout segment nul ou positif.*

2° *De deux segments positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande longueur; de deux segments négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite longueur.*

Pour faciliter la comparaison de deux segments, on peut faire la remarque suivante. Supposons le sens positif fixé de gauche à droite en regardant la figure; pour comparer deux segments, il suffit de les faire glisser le long de X'X de façon à leur donner une même origine quelconque : le plus grand est celui dont l'extrémité est alors située le plus vers la droite.

Les principes suivants deviennent évidents, si l'on se sert de ce nouveau mode de comparaison.

3° *Si le segment* $\overline{AB}$ *est plus grand que le segment* $\overline{CD}$,

supérieur ou égal lui-même au segment $\overline{EF}$, *le segment* $\overline{AB}$ *est plus grand aussi que le segment* $\overline{EF}$.

4° *Si le segment* $\overline{AB}$ *est plus petit que le segment* $\overline{CD}$, *inférieur ou égal lui-même au segment* $\overline{EF}$, *le segment* $\overline{AB}$ *est plus petit aussi que le segment* $\overline{EF}$.

C'est la vérité de ces principes qui justifie l'extension que nous avons donnée à la signification des expressions de comparaison : *plus grand* et *plus petit*.

§ 3. — Addition des segments.

8. — Soient deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ (*fig.* 5); faisons

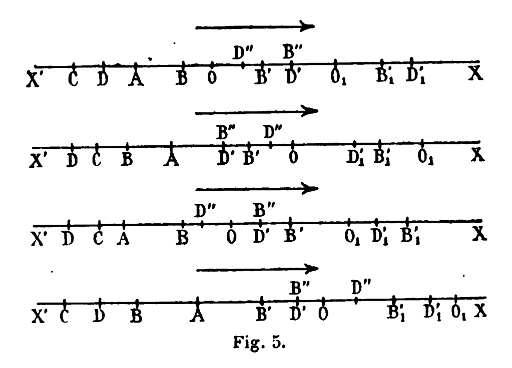


Fig. 5.

glisser $\overline{AB}$ le long de X′X de façon à amener son origine A en un point quelconque O; si alors B vient en B′, faisons glisser $\overline{CD}$ le long de X′X de façon à amener son origine C en B′; son extrémité D viendra alors occuper une position D′. Le segment $\overline{OD'}$ qui a pour origine O et pour extrémité D′ est la *somme* des deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, pris précisément dans l'ordre où ils sont écrits. Comme en arithmétique, on représente cette *addition* par la formule

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{OD'}.$$

Pour que cette définition soit légitime, il faut que, si

l'on choisit un autre point quelconque O_1 sur X'X, puis que l'on amène $\overline{AB}$ en $\overline{O_1B'_1}$ et $\overline{CD}$ en $\overline{B'_1D'_1}$, le segment $\overline{O_1D'_1}$ soit toujours égal au segment $\overline{OD'}$. Or, cette propriété a évidemment lieu, car les figures OB'D' et $O_1B'_1D'_1$ sont égales au sens géométrique, O_1 pouvant être amené en coïncidence avec O, B'_1 avec B', D'_1 avec D', simultanément, par simple glissement.

Supposons maintenant que l'on donne trois segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ (*fig.* 6). Choisissons un point quelconque O sur X'X, et amenons, par glissement le long de X'X, le segment $\overline{AB}$ dans la position $\overline{OB'}$, puis le segment $\overline{CD}$ dans la position $\overline{B'D'}$, et enfin le segment $\overline{EF}$ dans la position $\overline{D'F'}$. Le segment $\overline{OF'}$ qui a pour origine O et pour extrémité F' est la somme des trois segments donnés $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ pris précisément dans l'ordre où ils sont écrits.

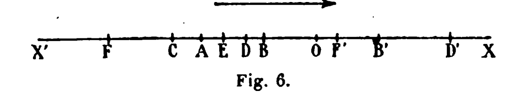


Fig. 6.

On représente cette addition par la formule

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=\overline{OF'}.$$

On légitimera cette définition comme plus haut. Il faut remarquer que le segment $\overline{OF'}$ est la somme des deux segments $\overline{OD'}$ et $\overline{EF}$; comme $\overline{OD'}$ est la somme des deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, on voit que l'on obtient la somme de trois segments, en faisant d'abord la somme des deux premiers, puis en ajoutant le troisième à cette somme.

Continuant de la même façon, on définira la somme d'autant de segments que l'on voudra, pris dans un ordre déterminé, et l'on verra que l'on peut obtenir cette somme en ajoutant successivement chacun des segments donnés à la somme de tous ceux qui le précèdent.

9. — Il est évident que :

1° *Si dans une somme un ou plusieurs segments sont*

nuls, on peut les supprimer sans rien changer ; en particulier, la somme de deux segments dont l'un est nul est égale à l'autre; réciproquement, on ne change pas une somme de segments en y introduisant un ou plusieurs segments nuls.

2° *Dans une somme, on peut, sans rien changer, remplacer un ou plusieurs segments par d'autres qui leur soient respectivement égaux; en particulier, deux sommes de segments respectivement égaux, pris dans le même ordre, sont égales.*

Voici d'autres propositions intuitives et de la plus grande importance.

3° *Si* A, B, C *sont trois points quelconques sur* X'X, *on peut écrire :*

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Il suffit de se reporter à la définition de l'addition.

En particulier, si A et B coïncident, on a :

$$0 = \overline{AC} + \overline{CA},$$

ce qui permet encore de dire que :

La somme de deux segments symétriques est un segment nul; réciproquement, si la somme de deux segments est nulle, ces deux segments sont symétriques.

Si l'on faisait coïncider les points A et C ou B et C, on retrouverait une proposition déjà énoncée plus haut.

4° Plus généralement, *si* A, B, C, D,... H, K, L *sont des points en nombre quelconque choisis arbitrairement sur* X'X, *on peut écrire :*

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \ldots\ldots + \overline{HK} + \overline{KL} + \overline{LB}.$$

Il suffit encore de se reporter à la définition de l'addition.

En particulier, si A et B coïncident, on obtient l'importante formule

$$0 = \overline{AC} + \overline{CD} + \ldots\ldots + \overline{HK} + \overline{KL} + \overline{LA}.$$

10. — Reportons-nous à la figure 5; en examinant séparement les divers cas possibles, on voit immédiatement que :

1° *La somme de deux segments de même sens est un segment de même sens qui a pour longueur la somme des longueurs des deux segments donnés.*

2° *La somme de deux segments de sens contraires est un segment ayant pour longueur la différence des longueurs des deux segments donnés, et qui a même sens que celui de ces deux segments qui a la plus grande longueur.*

Comme cas particuliers, on retrouvera les résultats déjà énoncés relativement à la somme de deux segments dont l'un est nul, et à la somme de deux segments symétriques.

Les propositions précédentes nous conduisent à énoncer le théorème fondamental suivant :

Théorème I

La somme de deux segments est indépendante de l'ordre de ces deux segments.

Car dans ces propositions, l'ordre des deux segments à ajouter n'intervient en aucune façon.

Ce théorème correspond à la formule

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{CD}+\overline{AB};$$

la somme $\overline{CD}+\overline{AB}$ est d'ailleurs le segment $\overline{OB''}$ que l'on obtiendrait en faisant glisser $\overline{CD}$ le long de X'X de façon à l'amener en $\overline{OD''}$, puis $\overline{AB}$ de façon à l'amener en $\overline{D''B''}$; les segments $\overline{OD'}$ et $\overline{OB''}$ sont donc toujours égaux, c'est-à-dire que les points B'' et D' coïncident dans tous les cas possibles.

11. — Le théorème du numéro précédent se généralise aisément.

Théorème II

La somme d'un nombre quelconque de segments est indépendante de l'ordre de ces segments.

Nous diviserons la démonstration de ce théorème en plusieurs parties.

1° *Dans une somme de plusieurs segments, on peut intervertir l'ordre des deux premiers segments.*

En d'autres termes, on a l'égalité

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{CD}+\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{GH}.$$

En effet, si S représente la somme $\overline{AB}+\overline{CD}$, le premier membre est obtenu en ajoutant successivement $\overline{EF}$ et $\overline{GH}$ à S; de même, si S' représente la somme $\overline{CD}+\overline{AB}$, le second membre est obtenu en ajoutant successivement $\overline{EF}$ et $\overline{GH}$ à S'. Mais nous savons que les sommes S et S' sont égales; les sommes $S+\overline{EF}+\overline{GH}$ et $S'+\overline{EF}+\overline{GH}$ sont donc elles-mêmes égales (**9**, 2°) et les deux membres de l'égalité proposée sont bien égaux, c. q. f. d.

2° *Dans une somme de plusieurs segments, on peut intervertir l'ordre des deux derniers segments.*

En d'autres termes, on a l'égalité

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{GH}+\overline{EF}.$$

Soit $\overline{OD'}$ un segment égal à la somme $\overline{AB}+\overline{CD}$; pour former le premier membre de l'égalité précédente, on fait glisser $\overline{EF}$ le long de X'X, de façon que E vienne en D' et F en F', puis de même $\overline{GH}$, de façon que G vienne en F' et H en H' : le segment $\overline{OH'}$ est alors la somme $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}$.

Mais nous avons (**9**, 3°) :

$$\overline{OH'}=\overline{OD'}+\overline{D'H'},$$

$$\overline{D'H'}=\overline{D'F'}+\overline{F'H'};$$

mais, puisque $\overline{D'F'}=\overline{EF}$, $\overline{F'H'}=\overline{GH}$, on peut encore écrire (**9**, 2°) :

$$\overline{D'H'}=\overline{EF}+\overline{GH};$$

si donc on utilise les parenthèses comme en arithmétique, il vient :

$$\overline{OH'}=\overline{OD'}+(\overline{EF}+\overline{GH}).$$

En raisonnant de la même façon, on verra que le second

membre de l'égalité à démontrer peut se mettre sous la forme

$$\overline{OD'} + (\overline{GH} + \overline{EF});$$

comme les sommes $\overline{EF} + \overline{GH}$ et $\overline{GH} + \overline{EF}$ sont égales, l'égalité proposée est vraie, c. q. f. d.

3° *Dans une somme de plusieurs segments, on peut intervertir l'ordre de deux segments consécutifs quelconques.*

Ceci étant déjà démontré pour les deux premiers ou les deux derniers segments, démontrons, par exemple, que l'on a :

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{KL} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{GH} + \overline{EF} + \overline{KL}.$$

En effet, les deux sommes

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} \quad \text{et} \quad \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{GH} + \overline{EF}$$

sont égales d'après ce qui précède (2°) ; et comme les deux membres de l'égalité à démontrer sont obtenus en ajoutant respectivement à chacune de ces sommes le même segment $\overline{KL}$, il en résulte qu'ils sont effectivement égaux, c. q. f. d.

4° *Dans une somme de plusieurs segments, on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des segments.*

Démontrons, par exemple, l'égalité

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{KL} = \overline{GH} + \overline{CD} + \overline{KL} + \overline{EF} + \overline{AB}.$$

En effet, en ne faisant jamais que des interversions de deux segments consécutifs, permises d'après ce qui précède, on a successivement :

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{KL} &= \overline{CD} + \overline{AB} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{KL}\\ &= \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{AB} + \overline{GH} + \overline{KL}\\ &= \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{AB} + \overline{KL}\\ &= \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{KL} + \overline{AB}\\ &= \overline{CD} + \overline{GH} + \overline{EF} + \overline{KL} + \overline{AB}\\ &= \overline{CD} + \overline{GH} + \overline{KL} + \overline{EF} + \overline{AB}\\ &= \overline{GH} + \overline{CD} + \overline{KL} + \overline{EF} + \overline{AB},\end{aligned}$$

c. q. f. d.

On raisonnera de même dans tous les cas possibles.

Remarque. — Nous avons suivi le même mode de raisonnement que quand il s'agit de démontrer en arithmétique qu'un produit de plusieurs facteurs est indépendant de l'ordre de ces facteurs.

12. — Un nouveau théorème, non moins important, résulte immédiatement du précédent.

Théorème III

On peut remplacer plusieurs parties d'une somme par leur somme effectuée; ou bien, inversement, on peut ajouter une somme à un segment ou à une autre somme en ajoutant ensemble ce segment ou les diverses parties de cette seconde somme et les diverses parties de la première somme.

Démontrons par exemple l'égalité

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}=(\overline{EF}+\overline{CD})+(\overline{GH}+\overline{AB}).$$

En effet, d'après ce que nous avons dit en définissant l'addition, la somme $(\overline{EF}+\overline{CD})+(\overline{GH}+\overline{AB})$ n'est pas différente de celle-ci : $\overline{EF}+\overline{CD}+(\overline{GH}+\overline{AB})$; car dans les deux cas, pour obtenir le résultat, il faut d'abord ajouter $\overline{CD}$ à $\overline{EF}$, puis ajouter à la somme ainsi formée la somme $\overline{GH}+\overline{AB}$.

Mais d'après le théorème précédent, on peut écrire :

$$\overline{EF}+\overline{CD}+(\overline{GH}+\overline{AB})=(\overline{GH}+\overline{AB})+\overline{EF}+\overline{CD};$$

de plus, le raisonnement déjà fait donne :

$$(\overline{GH}+\overline{AB})+\overline{EF}+\overline{CD}=\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{CD};$$

si enfin, dans cette dernière somme, on intervertit convenablement l'ordre des segments, on voit que la somme $(\overline{EF}+\overline{CD})+(\overline{GH}+\overline{AB})$ n'est pas différente de la somme $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{GH}$, c. q. f. d.

Remarque. — On observera que, pour démontrer le théorème II, nous nous sommes appuyés, dans la deuxième

partie, sur un cas particulier du théorème actuel : nous avons démontré en effet, *directement*, que l'on avait :

$$\overline{CD'}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{CD'}+(\overline{EF}+\overline{GH}).$$

13. — Le théorème précédent nous permet de généraliser les premières propositions du n° **10.**

1° *La somme d'un nombre quelconque de segments de même sens est un segment de même sens qui a pour longueur la somme des longueurs des segments donnés.*

Ceci est évident.

2° *Si l'on veut faire la somme d'un nombre quelconque de segments non tous de même sens, on pourra commencer par additionner ensemble d'une part tous les segments positifs, de l'autre tous les segments négatifs; on obtiendra ainsi deux segments de sens contraires, qu'il suffira d'ajouter ensemble comme il a été dit au n°* **10** (2°).

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent.

14. — Pour terminer l'étude de l'addition des segments, nous énoncerons encore les deux principes suivants qui sont équivalents.

1° *Soient deux sommes composées d'un même nombre de segments, par exemple* $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ et $\overline{A'B'}+\overline{C'D'}+\overline{E'F'}$; *si* $\overline{AB}$ *est supérieur à* $\overline{A'B'}$ *et si les segments* $\overline{CD}$ *et* $\overline{EF}$ *sont respectivement égaux ou supérieurs aux segments* $\overline{C'D'}$ *et* $\overline{E'F'}$, *la première somme est plus grande que la seconde.*

2° *Soient deux sommes composées d'un même nombre de segments, par exemple* $\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ *et* $\overline{A'B'}+\overline{C'D'}+\overline{E'F'}$; *si* $\overline{AB}$ *est inférieur à* $\overline{A'B'}$, *et si les segments* $\overline{CD}$ *et* $\overline{EF}$ *sont respectivement égaux ou inférieurs aux segments* $\overline{C'D'}$ *et* $\overline{E'F'}$, *la première somme est plus petite que la seconde.*

Pour se rendre compte de la vérité de ces principes, il suffit de se reporter à la définition de l'addition et au procédé de comparaison entre les segments indiqués au n° **7**, en remarquant que si un segment $\overline{AB}$ est supérieur ou

égal à un autre segment $\overline{CD}$, et a son origine A plus à droite que l'origine C de $\overline{CD}$, il aura aussi nécessairement son extrémité B plus à droite que l'extrémité D de $\overline{CD}$.

Si nous considérons maintenant des égalités ou inégalités *géométriques*, c'est-à-dire entre segments, nous pouvons encore dire :

3° *En ajoutant un même segment aux deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de même sens.*

4° *En ajoutant membre à membre deux ou plusieurs égalités ou inégalités de même sens, on obtient encore une égalité ou inégalité de même sens. De même, en ajoutant membre à membre une ou plusieurs égalités et une ou plusieurs inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.*

Remarque. — On voit que l'addition des segments jouit de toutes les propriétés de l'addition arithmétique ; elle se réduit même à celle-ci lorsque tous les segments à ajouter sont de même sens. C'est ce qui justifie le nom d'addition donné à l'opération qui vient de nous occuper.

§ 4. — Soustraction des segments.

15. — Soient deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ (*fig.* 7) ; faisons-

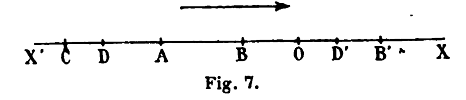


Fig. 7.

les glisser le long de X'X tous deux, de façon à leur donner une même origine quelconque O ; leurs extrémités B et D occuperont alors des positions B' et D'. Le segment $\overline{D'B'}$, qui a pour origine D' et pour extrémité B', est la *différence* des deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, pris précisément dans l'ordre où ils sont écrits. Comme en arithmétique, on représente cette soustraction par la formule

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{D'B'}.$$

Cette définition est légitime : on le montrera, comme aux nos **6** et **8**, en faisant voir que si l'on amène $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ en $\overline{O_1B'_1}$ et $\overline{O_1D'_1}$, le segment $\overline{D'_1B'_1}$ est égal au segment $\overline{D'B'}$, quel que soit le point O_1.

Remarquons tout de suite que, contrairement à ce qui a lieu en arithmétique, la soustraction de deux segments est une opération toujours possible, d'après la définition.

C'est ainsi que sur la figure on a :

$$\overline{CD} - \overline{AB} = \overline{B'D'}.$$

Ceci nous montre que, si l'on soustrait successivement chacun des deux segments donnés l'un de l'autre, on trouve deux résultats symétriques l'un de l'autre.

16. — La figure donne (9, 3°) :

$$\overline{OB'} = \overline{OD'} + \overline{D'B'},$$

ou encore

$$\overline{AB} = \overline{CD} + \overline{D'B'}.$$

On voit donc que : *si* $\overline{D'B'}$ *est la différence entre* $\overline{AB}$ *et* $\overline{CD}$, *la somme des segments* $\overline{D'B'}$ *et* $\overline{CD}$ *est égale à* $\overline{AB}$.

Il en résulte que l'on peut encore définir la soustraction comme l'opération inverse de l'addition ; en d'autres termes :

Retrancher $\overline{CD}$ *de* $\overline{AB}$, *c'est chercher le segment qu'il faut ajouter à* $\overline{CD}$ *pour reproduire* $\overline{AB}$. Il est évident que ce segment existe toujours d'après ce qui précède, et, en outre, qu'il est unique, d'après les principes 1° et 2° du n° **14**.

On peut encore dire :

La différence entre une somme de deux segments et l'un de ces segments est égale à l'autre.

Si $\overline{EF}$ *est la différence entre deux segments* $\overline{AB}$ *et* $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ *est la différence entre* $\overline{AB}$ *et* $\overline{EF}$.

17. — La figure donne encore (9, 3°) :

$$\overline{D'B'} = \overline{D'O} + \overline{OB'},$$

ou bien

$$\overline{D'B'} = \overline{AB} + \overline{D'O}.$$

Comme $\overline{D'O}$ est un segment symétrique de $\overline{OD'}$ ou de $\overline{CD}$, on voit donc que :

Retrancher $\overline{CD}$ *de* $\overline{AB}$, *c'est ajouter à* $\overline{AB}$ *un segment symétrique de* $\overline{CD}$.

Il est clair d'ailleurs que, réciproquement, *pour ajouter ensemble deux segments, on peut retrancher de l'un le symétrique de l'autre.*

La soustraction des segments n'est donc pas en réalité une opération distincte de l'addition : c'est cette propriété fondamentale qui va nous guider maintenant.

18. — Voici quelques principes presque évidents que l'on pourra démontrer soit en appliquant la définition première de la soustraction, soit en ramenant, comme nous venons de le faire, la soustraction à une addition.

1° *La différence entre deux segments égaux est nulle.*

2° *On ne change pas un segment en en retranchant un segment nul.*

3° *En retranchant un segment d'un segment nul, on obtient le symétrique du premier.*

4° *Dans une différence de deux segments, on peut, sans rien changer, remplacer l'un ou l'autre des deux segments donnés par un segment égal, ou bien tous les deux par des segments respectivement égaux.*

5° *Si* A, B, C *sont trois points quelconques sur* X'X, *on peut écrire :*

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

En faisant coïncider successivement deux quelconques des trois points A, B, C, on retrouve des propositions déjà énoncées.

6° *La différence de deux segments de même sens est un segment qui a pour longueur la différence des longueurs de ces deux segments, et dont le sens est celui du premier des segments donnés, ou le sens contraire, suivant que la longueur de ce segment est supérieure ou inférieure à celle du segment à retrancher.*

7° *La différence de deux segments de sens contraires est*

un segment qui a pour longueur la somme des longueurs de ces deux segments, et dont le sens est celui du premier des segments donnés.

8° *Soient deux différences de segments* $\overline{AB} - \overline{CD}$ *et* $\overline{A'B'} - \overline{C'D'}$; *si* $\overline{AB}$ *est supérieur à* $\overline{A'B'}$, *et si* $\overline{CD}$ *est égal ou inférieur à* $\overline{C'D'}$, *la première différence est plus grande que la seconde; il en est de même si* $\overline{AB}$ *est égal ou supérieur à* $\overline{A'B'}$, *et si* $\overline{CD}$ *est inférieur à* $\overline{C'D'}$.

9° *Soient les deux différences* $\overline{AB} - \overline{CD}$ *et* $\overline{A'B'} - \overline{C'D'}$; *si* $\overline{AB}$ *est inférieur à* $\overline{A'B'}$, *et si* $\overline{CD}$ *est égal ou supérieur à* $\overline{C'D'}$, *la première différence est plus petite que la seconde; il en est de même si* $\overline{AB}$ *est égal ou inférieur à* $\overline{A'B'}$, *et si* $\overline{CD}$ *est supérieur à* $\overline{C'D'}$.

Pour se rendre compte de la vérité de ces deux derniers principes, qui sont équivalents, on peut remarquer, en se reportant au n° 7, que, si deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont tels que A soit à gauche de C et B à droite de D, $\overline{AB}$ est nécessairement plus grand que $\overline{CD}$; ou bien encore que si un segment $\overline{AB}$ est plus grand ou plus petit qu'un autre segment $\overline{CD}$, le symétrique de $\overline{AB}$ est plus petit ou plus grand que le symétrique de $\overline{CD}$.

10° *En retranchant un même segment des deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de même sens.*

11° *En retranchant d'un même segment les deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de sens contraire à celui de la première.*

12° *En retranchant membre à membre deux égalités, on obtient encore une égalité.*

13° *En retranchant membre à membre deux inégalités de sens contraires, on obtient une nouvelle inégalité dont le sens est le même que celui de la première.*

14° *En retranchant membre à membre une égalité d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.*

15° *En retranchant membre à membre une inégalité*

d'une égalité, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire.

§ 5. — Polynômes géométriques.

19. — Imaginons que l'on ait à faire plusieurs additions ou soustractions successives de segments dans un ordre donné; par exemple, il faut 1° ajouter $\overline{CD}$ à $\overline{AB}$; 2° retrancher $\overline{EF}$ du résultat obtenu; 3° retrancher $\overline{GH}$ du nouveau résultat obtenu; 4° ajouter $\overline{KL}$ à ce dernier résultat. Si $\overline{PQ}$ est un segment égal au résultat de cette dernière opération, on écrit :

$$\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{EF}-\overline{GH}+\overline{KL}=\overline{PQ},$$

l'ordre et le signe des termes indiquant l'ordre et la nature des opérations à effectuer.

L'expression qui figure au premier membre est ce que nous appellerons un *polynôme géométrique*, ou simplement, s'il n'y a pas à craindre d'ambiguïté, un polynôme; $\overline{PQ}$ représente ce polynôme.

Il est clair qu'*on ne change pas un polynône géométrique, en remplaçant un ou plusieurs de ses termes par des segments respectivement égaux.*

Quand il n'y a que des additions à faire, le polynôme est précisément la somme de ses différents termes.

Dans tous les cas, on peut trouver facilement $\overline{PQ}$ par une suite de constructions géométriques simples, en appliquant successivement les règles d'addition et de soustraction. Plus simplement, on peut toujours ramener la question à celle de la somme d'un certain nombre de segments qu'on pourra construire comme au n° **13**; si en effet $\overline{E'F'}$ et $\overline{G'H'}$ désignent des segments symétriques de $\overline{EF}$ et $\overline{GH}$, on a (**17**) :

$$\overline{PQ}=\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{E'F'}+\overline{G'H'}+\overline{KL}.$$

20. — De cette remarque et du théorème II résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME IV

On peut, sans changer le résultat, intervertir d'une façon quelconque l'ordre des termes d'un polynôme géométrique, chaque terme conservant le signe qui le précède.

On a par exemple :

$$\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{EF}-\overline{GH}+\overline{KL}=\overline{CD}-\overline{GH}+\overline{KL}+\overline{AB}-\overline{EF};$$

en effet, si $\overline{E'F'}$ et $\overline{G'H'}$ désignent des segments symétriques de $\overline{EF}$ et $\overline{GH}$, les deux membres de l'égalité précédente sont respectivement égaux aux sommes :

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{E'F'}+\overline{G'H'}+\overline{KL}$$

et

$$\overline{CD}+\overline{G'H'}+\overline{KL}+\overline{AB}+\overline{E'F'},$$

et ces deux sommes sont égales en vertu du théorème III.

Remarque. — Il est bien entendu que si l'on change la place du premier terme, qui figure sans signe, on doit le faire figurer à sa nouvelle place avec le signe +, puisque c'est un terme à ajouter : le premier terme d'un polynôme est donc considéré comme affecté du signe +.

Il est clair aussi que l'on ne peut faire figurer à la première place que l'un des termes affectés du signe +, et alors on doit supprimer son signe; dans le cas contraire, en effet, l'écriture obtenue, commençant par l'indication d'une soustraction, n'aurait pas de sens.

On peut cependant s'affranchir de cette restriction et laisser au théorème toute sa généralité en faisant la convention suivante, légitime d'après ce qui a été dit plus haut :

Si le premier terme d'un polynôme géométrique est précédé du signe —, on le remplacera par le segment symétrique, sans signe; en d'autres termes, l'écriture $-\overline{AB}$ *est équivalente à* $\overline{A'B'}$, $\overline{AB}$ *et* $\overline{A'B'}$ *étant symétriques.*

C'est ainsi que si $\overline{C'D'}$ est symétrique de $\overline{CD}$, on a :

$$-\overline{CD}+\overline{AB}=\overline{C'D'}+\overline{AB}.$$

Grâce à cette convention qui revient, en somme, à supposer que le polynôme commence par un terme nul non écrit, on peut écrire aussi des polynômes dont tous les termes ont le signe —. Un tel polynôme, par exemple

$$-\overline{AB}-\overline{CD}-\overline{EF},$$

est la somme des symétriques de tous ses termes,

$$\overline{A'B'}+\overline{C'D'}+\overline{E'F'},$$

en appelant $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{E'F'}$ des segments symétriques de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$.

Remarquons encore, une fois pour toutes, que si l'on est amené à parler du signe du premier terme d'un polynôme, et que ce terme n'ait pas de signe, on doit le considérer comme affecté du signe +; inversement, si l'on est amené à écrire à la première place, dans un polynôme, un terme précédé du signe +, on supprimera ce signe.

Théorème V

21. — Dans un polynôme géométrique, on peut toujours, sans rien changer, supprimer ou ajouter deux segments égaux affectés de signes contraires, ou deux segments symétriques affectés du même signe.

Ramenons le polynôme à la forme d'une somme; les deux segments donnés deviennent alors, dans tous les cas, deux segments symétriques affectés du signe +; on peut les remplacer par leur somme effectuée (Th. III), et, comme cette somme est zéro, le théorème est démontré.

Théorème VI

Pour ajouter ensemble deux ou plusieurs polynômes géométriques, il suffit d'écrire à la suite les uns des autres tous leurs termes, chacun conservant son signe.

On a par exemple :

$$(\overline{AB} - \overline{CD}) + (\overline{EF} - \overline{GH}) = \overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} - \overline{GH}.$$

En effet, si $\overline{C'D'}$ et $\overline{H'G'}$ sont symétriques de $\overline{CD}$ et $\overline{GH}$, la première somme est égale à :

$$(\overline{AB} + \overline{C'D'}) + (\overline{EF} + \overline{G'H'}),$$

ou d'après le théorème III, à :

$$\overline{AB} + \overline{C'D'} + \overline{EF} + \overline{G'H'},$$

ce qui ne diffère pas de :

$$\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} - \overline{GH}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème VII

Pour retrancher d'un polynôme géométrique un autre polynôme géométrique, il suffit d'écrire à la suite des termes du premier, tous les termes du second changés de signe ou, ce qui revient au même, les symétriques de tous les termes du second, précédés des mêmes signes.

On a par exemple :

$$(\overline{AB} - \overline{CD}) - (\overline{EF} - \overline{GH}) = \overline{AB} - \overline{CD} - \overline{EF} + \overline{GH}.$$

En effet, si nous ajoutons $\overline{EF} - \overline{GH}$ au polynôme qui figure au second membre, on obtient d'après le théorème précédent :

$$\overline{AB} - \overline{CD} - \overline{EF} + \overline{GH} + \overline{EF} - \overline{GH},$$

ou encore $\overline{AB} - \overline{CD}$, d'après le théorème V. La proposition est par suite démontrée.

On ferait voir de même que, si $\overline{E'F'}$ et $\overline{G'H'}$ sont symétriques de $\overline{EF}$ et $\overline{GH}$, la différence donnée est égale à :

$$\overline{AB}-\overline{CD}+\overline{E'F'}-\overline{G'H'}.$$

Corollaire. — *En changeant les signes qui précèdent tous les termes d'un polynôme géométrique, ou, ce qui revient au même, en remplaçant chaque terme du polynôme par son symétrique, et conservant les signes, on obtient un nouveau polynôme qui est représenté par un segment symétrique du segment qui représente le premier.*

L'opération faite revient en effet à retrancher le polynôme donné de zéro, ce qui fournit un résultat symétrique (**18**, 3°).

22. — Les théorèmes précédents combinés ensemble permettraient d'énoncer de nombreuses conséquences particulières.

Voici comment on pourra les appliquer pour construire d'une façon simple le segment qui représente un polynôme géométrique : après avoir supprimé les termes qui se détruisent d'eux-mêmes en vertu du théorème V, on conservera tous les segments positifs avec leurs signes, et on remplacera tous les segments négatifs par leurs symétriques, pris avec des signes contraires; on n'aura plus alors que des segments positifs, les uns avec le signe +, les autres avec le signe —; on fera la somme de ceux qui ont le signe +, et la somme de ceux qui ont le signe —; on obtiendra ainsi deux segments dont il faudra faire finalement la différence.

En effet on a, d'après le théorème VII, l'égalité

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}-\overline{GH}-\overline{KL}=(\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF})-(\overline{GH}+\overline{KL}).$$

Cette construction n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de celle qui consiste à mettre le polynôme sous la forme d'une somme.

Plus généralement, on peut énoncer l'important théorème suivant :

Théorème VIII

On ne change pas un polynôme géométrique en réunissant dans une même parenthèse affectée du signe +, tant de termes qu'on voudra de ce polynôme pris avec leurs signes, ou dans une même parenthèse affectée du signe —, tant de termes qu'on voudra pris avec des signes contraires.

C'est ainsi que l'on a :

$$\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{EF}-\overline{GH}+\overline{KL}=\overline{KL}+(\overline{CD}-\overline{GH})-(\overline{EF}-\overline{AB}).$$

Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer les théorèmes VI et VII.

23. — On peut supposer que les différents termes d'un polynôme géométrique complexe sont eux-mêmes des polynômes géométriques.

Il est clair que l'on pourra ramener la construction d'un tel polynôme à celle d'un polynôme ordinaire, en appliquant les théorèmes VI et VII ou, ce qui revient au même, le théorème précédent d'une façon inverse :

Si une parenthèse est affectée du signe +, on pourra la supprimer purement et simplement; si elle est affectée du signe —, on pourra encore la supprimer, en ayant soin de changer les signes de tous les termes qui y sont contenus.

24. — Voici un dernier théorème relatif aux égalités ou inégalités géométriques.

Théorème IX

Soit une égalité ou inégalité dont les deux membres sont des polynômes géométriques; si l'on fait passer un terme d'un membre dans un autre en ayant soin de changer en même temps son signe, on ne trouble pas l'égalité ou l'inégalité.

Démontrons par exemple que dans l'inégalité

$$\overline{AB}-\overline{CD}+\overline{EF}>\overline{GH}-\overline{KL},$$

on peut faire passer le terme $\overline{KL}$ dans le premier membre en changeant son signe et écrire encore :

$$\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{KL} > \overline{GH}.$$

En effet, d'après un principe connu, on ne trouble pas l'inégalité donnée en ajoutant le même segment $\overline{KL}$ à ses deux membres; le premier membre devient alors $\overline{AB} - \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{KL}$ et le second $\overline{GH} - \overline{KL} + \overline{KL}$ ou simplement $\overline{GH}$ (Th. V), et la proposition est démontrée.

On fera de même dans tous les cas.

Corollaire. — *En changeant les signes de tous les termes d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de sens contraire.*

C'est ainsi que de l'inégalité

$$\overline{AB} - \overline{CD} > \overline{EF} - \overline{GH},$$

on déduit

$$\overline{CD} - \overline{AB} < \overline{GH} - \overline{EF};$$

en effet, en changeant de membre tous les termes de l'inégalité donnée, il vient :

$$\overline{GH} - \overline{EF} > \overline{CD} - \overline{AB}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On pourrait encore remarquer que l'opération faite revient à remplacer les deux membres de l'inégalité donnée par les segments symétriques, et appliquer une remarque déjà faite (18, 9°).

Enfin, nous remarquerons que les théorèmes et principes rencontrés jusqu'à présent permettent de reconnaître comment l'on peut combiner par voie d'addition ou de soustraction des égalités ou inégalités données en nombre quelconque. C'est ainsi que si l'on a :

$$\overline{AB} > \overline{CD},$$
$$\overline{EF} < \overline{GH},$$
$$\overline{KL} = \overline{MN},$$
$$\overline{PQ} > \overline{RS},$$

on pourra écrire :

$$\overline{AB} - \overline{EF} + \overline{KL} + \overline{PQ} > \overline{CD} - \overline{GH} + \overline{MN} + \overline{RS}.$$

Il suffit pour s'en convaincre de remplacer $\overline{EF} < \overline{GH}$ par $-\overline{EF} > -\overline{GH}$, et d'appliquer un principe démontré plus haut (**14, 4°**).

CHAPITRE II

THÉORIE DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

§ 1er. — Définition et comparaison des nombres algébriques.

25. — Ayant choisi une unité de longueur arbitraire, *on appelle valeur algébrique d'un segment le nombre arithmétique qui mesure la longueur de ce segment, affecté du signe + ou du signe —, suivant que le segment donné est positif ou négatif.*

Un nombre arithmétique ainsi affecté d'un signe est un *nombre algébrique*, *positif* ou *négatif*, suivant qu'il est affecté du signe + ou du signe —.

A chaque segment correspond un nombre algébrique qui *mesure* ce segment. Inversement, à un nombre algébrique correspond une infinité de segments qui, ayant tous même longueur et même sens, sont tous égaux entre eux.

Aux segments positifs correspondent les nombres positifs; aux segments négatifs, les nombres négatifs.

A un segment nul correspond le nombre *zéro*, qui n'a pas de signe.

La *valeur absolue* d'un nombre algébrique est le nombre arithmétique qui mesure la longueur du segment correspondant, c'est-à-dire encore le nombre arithmétique que l'on obtient en supprimant le signe du nombre algébrique.

Un nombre algébrique est dit entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, suivant que sa valeur absolue est elle-même un nombre arithmétique entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable.

Exemple. — Les nombres algébriques

$$(+5), \left(-\frac{3}{2}\right), \left(-\sqrt{2}\right),$$

ont respectivement pour valeurs absolues 5, $\frac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$; le premier est entier et positif, le second est fractionnaire et négatif, le troisième est incommensurable et négatif.

Les nombres précédents ont été écrits entre parenthèses pour montrer que le signe est inséparable du nombre arithmétique qu'il précède. Généralement nous représenterons un nombre algébrique par une seule lettre équivalente à l'ensemble d'un signe et d'un nombre arithmétique.

26. — Comme nous l'avons déjà dit, un segment est complètement déterminé par sa valeur algébrique, du moins si l'on ne fait attention qu'à sa longueur et à son sens, sa position sur la droite qui le porte restant indifférente.

Dans toute la théorie des segments développée dans le chapitre Ier, nous avons constaté que l'on peut toujours remplacer un segment par un autre qui lui soit égal, c'est-à-dire que la position des segments sur la droite qui les porte est indifférente, et qu'il faut se préoccuper uniquement du sens et de la longueur; il en résulte que nous allons pouvoir développer maintenant une théorie des nombres algébriques toute semblable à celle des segments, en transportant aux nombres algébriques toutes les propriétés des segments qu'ils servent à mesurer.

Pour simplifier le langage, nous dirons simplement *nombre* au lieu de *nombre algébrique;* aucune ambiguïté n'en résultera si en même temps nous avons soin de ne

jamais oublier l'épithète *arithmétique* quand il s'agira d'un *nombre arithmétique.*

Deux nombres sont égaux s'ils ont même valeur absolue et même signe ; dans ces conditions, en effet, et dans ces conditions seulement, les segments correspondants sont égaux.

Si deux nombres ont même valeur absolue et des signes contraires, on dit qu'ils sont *égaux et de signes contraires,* ou encore *symétriques;* les segments correspondants sont, en effet, symétriques.

Il sera facile de transporter aux nombres les principes relatifs aux segments énoncés au n° 5.

27. — Un nombre a est *supérieur, égal* ou *inférieur* à un autre nombre b, suivant que le segment mesuré par a est lui-même supérieur, égal ou inférieur au segment mesuré par b.

Par suite :

1° *Un nombre positif est supérieur à tout nombre nul ou négatif; un nombre négatif est inférieur à tout nombre nul ou positif.*

2° *De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue; de deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.*

On transportera de même aux nombres les principes 3° et 4° du n° 7.

Exemple. — On a les inégalités

$$(+5) > (-7), \quad (+5) > (+3), \quad (-3) > (-5).$$

Pour indiquer qu'un nombre a est positif, on écrit :

$$a > 0;$$

pour indiquer qu'un nombre a est négatif, on écrit :

$$a < 0.$$

§ 2. — Addition et soustraction des nombres algébriques. Polynômes algébriques.

28. — On appelle *somme* de plusieurs nombres a, b, c, d, le nombre s qui mesure la somme des segments qui correspondent aux nombres donnés, et l'on écrit :

$$a+b+c+d=s.$$

Une telle somme s'appelle souvent *somme algébrique*, pour éviter toute confusion avec l'idée arithmétique de somme.

Il est aisé de transporter aux nombres toutes les propositions que nous avons énoncées à propos de l'addition des segments. Nous nous contenterons d'énoncer à nouveau les principales d'entre elles.

1° *La somme de deux nombres égaux et de signes contraires est nulle ; réciproquement, si la somme de deux nombres est nulle, ces nombres sont égaux et de signes contraires, ou bien tous deux nuls.*

Exemple :

$$(+4)+(-4)=0.$$

2° *La somme de deux nombres de même signe est un nombre de même signe, qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues des deux nombres donnés.*

Exemple :

$$(+6)+(+9)=(+15),$$
$$(-5)+(-3)=(-8).$$

3° *La somme de deux nombres de signes contraires est un nombre ayant pour valeur absolue la différence des valeurs absolues des deux nombres donnés, et qui a même signe que celui de ces deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.*

Exemple :

$$(+9)+(-6)=(+3),$$
$$(-9)+(+6)=(-3).$$

4° *La somme de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre de ces nombres.*

5° *On peut remplacer plusieurs parties d'une somme de nombres par leur somme effectuée ; et inversement, on peut ajouter une somme à un nombre ou à une autre somme, en ajoutant ensemble ce nombre ou les diverses parties de cette seconde somme et les diverses parties de la première somme.*

6° *La somme d'un nombre quelconque de nombres de même signe est un nombre de même signe, qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues des nombres donnés.*

Exemple :

$$(-6)+(-14)+(-7)+(-8)=(-35).$$

7° *Pour calculer une somme de nombres non tous de même signe, on pourra commencer par additionner ensemble d'une part tous les nombres positifs, de l'autre tous les nombres négatifs ; on obtiendra ainsi deux nombres de signes contraires, qu'il suffira d'ajouter ensemble comme il a été dit plus haut* (3°).

Exemple :

$$\begin{aligned}(-15)+(+7)+(-3)+(+42)+(-8) &= (+49)+(-26)\\ &= (+23).\\ (+3)+(-5)+(+4)+(-9)+(-12) &= (+7)+(-26)\\ &= (-19).\end{aligned}$$

Enfin, relativement aux égalités et inégalités *algébriques*, c'est-à-dire entre nombres algébriques, nous pourrons dire :

8° *En ajoutant un même nombre aux deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de même sens.*

9° *En ajoutant membre à membre deux ou plusieurs égalités ou inégalités de même sens, on obtient encore une égalité ou inégalité de même sens. De même, en ajoutant membre à membre une ou plusieurs égalités et une ou plusieurs inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.*

29. — On appelle *différence* de deux nombres a et b, le nombre d qui mesure la différence des segments qui correspondent aux nombres donnés, et l'on écrit :

$$a - b = d.$$

Une telle différence s'appelle souvent *différence algébrique*, pour éviter toute confusion avec l'idée arithmétique de différence.

Nous allons transporter aux nombres les principales propositions du § 4 (chap. I[er]) relatives aux segments.

1° *La soustraction est l'opération inverse de l'addition.* On a :

$$a = b + d,$$

et aussi

$$a - d = b.$$

2° *Si* b′ *est égal et de signe contraire à* b, *retrancher* b *de* a *est la même chose qu'ajouter* b′ *à* a. On a :

$$a + b' = d.$$

La soustraction n'est donc pas différente de l'addition.

3° *On ne change pas un nombre en en retranchant zéro.*

4° *En retranchant un nombre de zéro, on obtient le nombre symétrique du premier.*

5° *La différence de deux nombres de même signe est un nombre qui a pour valeur absolue la différence des valeurs absolues de ces deux nombres, et dont le signe est celui du premier des nombres donnés ou le signe contraire, suivant que la valeur absolue de ce nombre est supérieure ou inférieure à celle du nombre à retrancher.*

Exemple :

$$(+5) - (+3) = (+2),$$
$$(+5) - (+7) = (-2),$$
$$(-5) - (-3) = (-2),$$
$$(-5) - (-7) = (+2).$$

6° *La différence de deux nombres de signes contraires est un nombre qui a pour valeur absolue la somme des*

valeurs absolues de ces deux nombres, et dont le signe est celui du premier des nombres donnés.

Exemple :

$$(+5)-(-7)=(+12),$$
$$(-7)-(+9)=(-16).$$

7° *En retranchant un même nombre des deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de même sens.*

8° *En retranchant d'un même nombre les deux membres d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de sens contraire à celui de la première.*

9° *En retranchant membre à membre deux égalités, on obtient encore une égalité.*

10° *En retranchant membre à membre deux inégalités de sens contraires, on obtient une nouvelle inégalité dont le sens est le même que celui de la première.*

11° *En retranchant membre à membre une égalité d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.*

12° *En retranchant membre à membre une inégalité d'une égalité, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire.*

30. — Un *polynôme algébrique* est le résultat p d'une suite d'additions ou de soustractions effectuées sur des nombres donnés, a, b, c, d,... On écrira par exemple :

$$a+b-c-d+e=p.$$

A tout polynôme algébrique correspond un polynôme géométrique, et par suite les propositions du § 5 (chap. Ier) se transportent aisément aux nombres.

1° *On ramène un polynôme algébrique à une somme algébrique en remplaçant la soustraction d'un nombre par l'addition du nombre symétrique.*

C'est ainsi qu'en appelant c' et d' les nombres symétriques de c et d, on a :

$$a+b-c-d+e=a+b+c'+d'+e.$$

2° *On peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des termes d'un polynôme algébrique, chaque terme conservant le signe qui le précède.*

Comme au n° **20**, il est entendu que s'il s'agit du premier terme, on le considérera comme précédé du signe $+$; que si l'on met à la première place un terme précédé du signe $+$, on devra supprimer ce signe. Enfin, on conviendra que si l'on met à la première place un terme précédé du signe $-$, on laissera ce signe, et que l'on regardera l'écriture $-a$ comme équivalente à a', en appelant a' le nombre symétrique de a; de cette façon on arrivera même à la notion de polynômes dont les termes seront tous précédés du signe $-$.

Il faut encore observer avec soin de ne pas confondre les signes qui précèdent les différents termes d'un polynôme algébrique avec les signes de ces termes eux-mêmes.

Exemple. — On a les égalités

$$\begin{aligned}&(+5)-(-4)+(-3)-(+7)\\ &=-(-4)-(+7)+(-3)+(+5)\\ &=(+4)+(-7)+(-3)+(+5).\end{aligned}$$

3° *Dans un polynôme algébrique, on peut, sans rien changer, supprimer ou ajouter deux nombres égaux précédés de signes contraires, ou deux nombres symétriques précédés du même signe.*

Exemple :

$$(-5)+(+3)-(+3)=(-5)+(+3)+(-3)=(-5).$$

4° *Pour ajouter deux ou plusieurs polynômes algébriques, il suffit d'écrire à la suite les uns des autres tous leurs termes, chacun conservant le signe qui le précède.*

5° *Pour retrancher d'un polynôme algébrique un autre polynôme algébrique, il suffit d'écrire à la suite des termes du premier tous les termes du second, en ayant soin de changer les signes qui les précèdent; ou, ce qui revient au même, les symétriques de tous les termes du second, précédés des mêmes signes.*

6° *En changeant les signes qui précèdent tous les termes d'un polynôme algébrique, ou, ce qui revient au même, en remplaçant chaque terme du polynôme par son symétrique, on obtient un nouveau polynôme dont la valeur est égale et de signe contraire à celle du premier.*

7° *On ne change pas un polynôme algébrique en réunissant dans une même parenthèse précédée du signe +, tant de termes qu'on voudra de ce polynôme pris avec les signes qui les précèdent; ou, dans une même parenthèse précédée du signe —, tant de termes qu'on voudra, en changeant les signes qui les précèdent. Inversement, dans un polynôme algébrique complexe, on peut supprimer purement et simplement une parenthèse précédée du signe +; on peut aussi supprimer une parenthèse précédée du signe —, en ayant soin de changer les signes qui précèdent tous les termes qui y sont contenus.*

8° *Soit une égalité ou inégalité dont les deux membres sont des polynômes algébriques; si l'on fait passer un terme d'un membre dans un autre en ayant soin de changer en même temps son signe, on ne trouble pas l'égalité ou l'inégalité.*

En changeant les signes de tous les termes d'une égalité ou d'une inégalité, on obtient encore une égalité ou une inégalité de sens contraire.

Ajoutons que des égalités et inégalités algébriques en nombre quelconque pourront être combinées par voie d'addition et de soustraction dans des cas faciles à reconnaître.

31. — Pour calculer simplement la valeur d'un polynôme algébrique, on peut ramener ce calcul à celui d'une somme algébrique. On peut encore, et cette nouvelle méthode n'est pas essentiellement distincte de la précédente, après avoir supprimé les termes qui se détruisent d'eux-mêmes, conserver tous les termes positifs avec les signes qui les précèdent, et remplacer tous les termes négatifs par leurs symétriques, en changeant les signes qui les précèdent; on n'aura plus alors que des nombres positifs, précédés les uns du signe +, les autres du signe —; on

fera la somme de ceux qui sont précédés du signe + et la somme de ceux qui sont précédés du signe —; on obtiendra ainsi deux nombres positifs dont il faudra finalement faire la différence.

Exemple. — Voici quelques transformations qui serviront d'exemple pour les théorèmes précédents.

Soit à calculer l'expression

$$[(+18)-(-13)-(+4)]-[(-7)+(+20)]$$
$$+[-(+13)-(-14)+(-16)].$$

Si l'on calcule directement, en partant des définitions, les valeurs des polynômes entre crochets, on trouve $(+27)$, $(+13)$, (-15); la valeur de l'expression donnée est donc :

$$(+27)-(+13)+(-15),$$

ou, par un calcul direct, (-1).

Mais en appliquant ce qui a été dit, supprimons d'abord les crochets; on obtient :

$$(+18)-(-13)-(+4)-(-7)-(+20)-(+13)$$
$$-(-14)+(-16).$$

On peut calculer ce polynôme directement et on trouve (-1) pour sa valeur.

On peut aussi ramener ce calcul à celui de la somme algébrique

$$(+18)+(+13)+(-4)+(+7)+(-20)+(-13)$$
$$+(+14)+(-16);$$

d'après le n° **28** (7°), cette somme est égale à

$$(+52)+(-53), \text{ ou encore à } (-1).$$

Enfin, si l'on applique ce qui a été dit en dernier lieu, on supprimera d'abord les termes $-(-13)$ et $-(+13)$, et l'on écrira l'expression donnée sous la forme

$$(+18)-(+4)+(+7)-(+20)+(+14)-(+16);$$

sa valeur est donc :

$$(+39)-(+40), \quad \text{ou } (-1).$$

32. — De tout ce qui précède, il résulte clairement que tout ce que l'on dit en arithmétique sur le calcul des nombres arithmétiques s'applique exactement aux nombres algébriques positifs, sans aucune modification. Une opération faite sur des nombres positifs ne diffère pas de l'opération arithmétique correspondante faite sur les valeurs absolues de ces nombres, quand celle-ci est possible. De plus, le résultat de la comparaison de deux nombres positifs est le même que celui de la comparaison de leurs valeurs absolues. Aussi doit-on considérer les nombres algébriques positifs comme identiques aux nombres arithmétiques correspondants, c'est-à-dire à leurs valeurs absolues. En particulier, on représentera simplement d'habitude un nombre positif, $(+5)$, par exemple, par sa valeur absolue 5, en supprimant les parenthèses et le signe $+$. Pour simplifier aussi, nous représenterons toujours un nombre négatif par sa valeur absolue précédée du signe —, en supprimant les parenthèses, toutes les fois que celles-ci n'auront pas une utilité absolue.

C'est ainsi que le polynôme algébrique

$$(-7)+(+4)+(-3)-(-5)-(+6)$$

s'écrira simplement sous la forme

$$-7+4+(-3)-(-5)-6.$$

On simplifie encore cette forme en opérant comme nous l'avons dit à la fin du numéro précédent, c'est-à-dire en remplaçant tous les termes négatifs par leurs symétriques, à la condition de changer en même temps les signes qui les précèdent. Le polynôme précédent s'écrit alors :

$$-7+4-3+5-6.$$

Pour calculer sa valeur, on fera la somme 9 des termes précédés du signe $+$ et la somme 16 des termes précédés du signe —; la différence $9-16$, ou -7, est la valeur cherchée.

D'une façon générale, on voit que a désignant un nombre arithmétique, un polynôme algébrique se met

sous la forme d'un polynôme arithmétique en remplaçant les nombres positifs par leur valeur absolue, c'est-à-dire les termes de la forme $+(+a)$ ou $-(+a)$ par $+a$ ou $-a$ simplement; et en remplaçant les termes de la forme $+(-a)$ ou $-(-a)$ par $-a$ ou $+a$.

On calculera d'ailleurs sur les polynômes algébriques mis sous la forme de polynômes arithmétiques, comme s'il s'agissait effectivement de polynômes arithmétiques, sans se préoccuper de la possibilité des opérations, en remarquant que, a et b désignant des nombres arithmétiques, la différence algébrique $a-b$, c'est-à-dire d'une façon précise $(+a)-(+b)$ est égale au nombre positif $(a-b)$ ou au nombre négatif $-(b-a)$, suivant que a est supérieur ou inférieur à b : elle existe toujours, tandis qu'il n'en est pas de même de la différence arithmétique $a-b$.

Il suffira d'un peu d'attention pour éviter toute erreur dans l'application des règles précédentes. Il faut reconnaître d'ailleurs que, si cette application est facilitée par l'emploi des signes d'opération $+$ et $-$ pour distinguer les nombres positifs et négatifs, cette même circonstance ne laisse pas d'introduire une certaine confusion, bien facile à la vérité à faire disparaître avec quelque réflexion.

33. Remarque. — Nous avons développé complètement au chapitre Ier la théorie des segments, et nous avons pu ensuite nous contenter d'énoncer celle des nombres algébriques.

Il est clair que nous aurions pu procéder différemment, en ne donnant que les principes fondamentaux de la théorie des segments, de façon à obtenir les principes correspondants de la théorie des nombres algébriques, et en démontrant ensuite directement les autres propositions relatives aux nombres à l'aide des principes déjà connus : ces nouvelles propositions s'appliqueraient alors aux segments sans démonstration. Nous allons donner un exemple de cette méthode.

Pour faire la théorie des opérations, il n'est pas nécessaire d'avoir défini ce qu'on appelle segment ou nombre

plus grand ou plus petit qu'un autre. D'ailleurs, si l'on se reporte au nº 6, on voit qu'on peut dire d'un segment $\overline{AB}$ qu'il est supérieur, égal ou inférieur à un autre $\overline{CD}$, suivant que la différence $\overline{AB} - \overline{CD}$ est positive, nulle ou négative. De la même façon, nous dirons qu'*un nombre* a *est supérieur, égal ou inférieur à un autre nombre* b, *suivant que la différence* a — b *est un nombre positif, nul ou négatif :* cette définition correspond d'ailleurs à celle de l'arithmétique.

De cette définition et de la théorie des opérations, il est facile de tirer toutes les propositions relatives aux inégalités algébriques. On suivra la marche suivante pour obtenir les principales d'entre elles.

1° *On ne trouble pas une inégalité* a > b *en ajoutant un même nombre* c *à ses deux membres.*

En effet, on a par hypothèse $a - b > 0$; d'ailleurs $a - b = (a + c) - (b + c)$; donc on a aussi $(a + c) - (b + c) > 0$, c'est-à-dire $a + c > b + c$, c. q. f. d.

2° *On ne trouble pas une inégalité en faisant passer un terme d'un membre dans un autre, à la condition de changer en même temps son signe.*

Cette proposition résulte de la précédente (**24**, Th. IX).

3° *En ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens on obtient encore une inégalité de même sens.*

Soit $a > b$ et $c > d$ les deux inégalités données; les différences $a - b$ et $c - d$ sont positives et, par suite, il en est de même de leur somme. On a donc :

$$a - b + c - d > 0,$$

ou, d'après ce qui précède :

$$a + c > b + d, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4° *En retranchant membre à membre deux inégalités de sens contraires, on obtient une inégalité de même sens que la première.*

Soit $a > b$, $c < d$ les deux inégalités données; les diffé-

rences $a - b$ et $d - c$ sont positives et par suite il en est de même de leur somme; on a donc :

$$a - b + d - c > 0,$$

ou bien

$$a - c > b - d, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

5° *En changeant les signes de tous les termes d'une inégalité, on obtient une inégalité de sens contraire.*

Car si

$$a - b > c - d,$$

on a (2°)

$$-c + d > -a + b, \qquad \text{c. q. f. d}$$

Et ainsi de suite.

§ 3. — Multiplication des nombres algébriques. Puissances.

34. — *On appelle produit d'un nombre algébrique* a *par un autre nombre algébrique* b *un troisième nombre* p *dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des deux facteurs* a *et* b, *et qui a pour signe le signe* + *ou le signe* —, *suivant que les deux facteurs* a *et* b *sont de même signe, tous deux positifs ou tous deux négatifs, ou bien de signes contraires, l'un positif, l'autre négatif.*

On écrit $a \times b = p,$

ou plus simplement $ab = p,$

en supprimant le signe $\times$ de *multiplication* dans les mêmes circonstances que nous avons déjà indiquées en arithmétique, c'est-à-dire entre deux nombres représentés par des lettres, entre un nombre représenté par une lettre et un nombre représenté par des chiffres, enfin entre deux facteurs placés entre parenthèses.

D'après la définition, on a par exemple :

$$(+5)(+9) = 45,$$
$$(+5)(-9) = -45,$$
$$(-5)(+9) = -45,$$
$$(-5(-9) = 45.$$

Il est clair que, d'après la définition même, on peut énoncer l'importante proposition suivante :

Théorème I

Un produit de deux nombres algébriques est indépendant de l'ordre de ces deux facteurs.

La définition montre en effet que, si l'on remplace a par b et b par a, le produit conserve même valeur absolue et même signe.

C'est en vertu de cette proposition qu'il est inutile de distinguer un multiplicande et un multiplicateur dans la multiplication de deux nombres quelconques.

Remarque. — La définition que nous avons donnée du produit de deux nombres semble arbitraire; il est facile cependant de la justifier. Remarquons d'abord que l'on peut considérer un segment ou un nombre algébrique A comme une grandeur; par suite on peut facilement définir, comme en arithmétique, le produit hA de A par un nombre arithmétique h. En effet, supposons d'abord h entier; hA est alors la somme de h segments ou nombres égaux à A; supposons maintenant h fractionnaire, de la forme $\frac{1}{q}$, q étant entier : hA est alors le segment ou nombre qui, multiplié par q, reproduit A; supposons en troisième lieu h fractionnaire, de la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant entiers : hA est alors le produit de $\frac{1}{q}$A par p; si enfin h est incommensurable, le procédé ordinaire permet encore de définir hA.

Ceci posé, nous voyons que dans tous les cas le produit d'un nombre algébrique A par un nombre arithmétique h est un nombre algébrique qui a même signe que A et pour valeur absolue le produit de h par la valeur absolue de A. Répétons d'ailleurs encore une fois que, dans l'opération que nous venons de décrire, A joue le rôle

d'une grandeur : c'est pour souligner ce fait que nous avons employé une grande lettre, et utilisé la notation hA, qui ne présente pas d'ambiguïté, puisqu'il ne s'agit pas ici d'une multiplication ordinaire.

Or, nous savons que les nombres algébriques positifs et les nombres arithmétiques sont identiques : si donc nous voulons donner une bonne définition de la multiplication de deux nombres algébriques, opération qui n'a d'autre sens que celui qu'on lui donne par définition, il faudra d'abord que la multiplication d'un nombre algébrique par un nombre positif coïncide avec la multiplication de ce nombre algébrique par le nombre arithmétique correspondant au multiplicateur; donc, en premier lieu :

Le produit d'un nombre algébrique par un autre positif a même signe que le premier, et pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des deux facteurs.

Si ensuite, nous admettons *a priori* que notre définition doit rendre possible, comme en arithmétique, l'interversion des deux facteurs d'un produit, nous sommes amenés à dire, d'après ce qui précède :

Le produit d'un nombre algébrique positif par un autre négatif a pour signe le signe —, et pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des deux facteurs.

Enfin, comme nous constatons qu'en multipliant par un nombre négatif, le produit est de signe contraire à celui du multiplicande, quand celui-ci est positif, nous sommes amenés à généraliser cette règle et à dire :

Le produit d'un nombre algébrique par un autre négatif a le signe contraire du premier, et pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des deux facteurs.

Nous avons ainsi retrouvé complètement notre première définition.

35. — On peut multiplier d'abord un nombre a par un nombre b; puis le produit ainsi obtenu par un nouveau nombre c; puis le produit ainsi obtenu par un nouveau nombre d; puis le produit ainsi obtenu par un nouveau nombre e; et ainsi de suite. Si p est le produit final,

p est un *produit de plusieurs facteurs*, et l'on écrit par exemple :

$$a \times b \times c \times d \times e = p,$$

ou plus simplement :

$$abcde = p,$$

l'ordre des facteurs n'étant pas indifférent jusqu'à preuve du contraire.

Théorème II

Un produit de plusieurs facteurs a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des différents facteurs, et pour signe le signe + ou le signe —, suivant que les facteurs négatifs qui figurent dans le produit sont en nombre pair ou impair.

La première partie de cette proposition est évidente d'après les définitions; pour démontrer la seconde, remarquons d'abord qu'elle est vraie pour un produit de deux facteurs, en considérant bien entendu zéro comme un nombre pair.

Supposons donc qu'elle soit vraie pour un produit de n facteurs, et montrons qu'elle subsiste si on augmente d'une unité le nombre des facteurs : il est clair alors qu'elle sera toujours vraie, car, étant vraie pour $n = 2$, elle le sera encore pour $n = 3$, par suite pour $n = 4$, et ainsi de suite.

Soit donc p un produit de n facteurs; si parmi ces facteurs il y en a n' qui sont négatifs, p est positif ou négatif, suivant que n' est pair ou impair, par hypothèse.

Introduisons un nouveau facteur; s'il est positif, le nouveau produit conserve le signe de p, et renferme encore n' facteurs négatifs; s'il est négatif, le nouveau produit a le signe contraire de p, et renferme $n' + 1$ facteurs négatifs; comme $n' + 1$ est impair ou pair suivant que n' est pair ou impair, on voit bien que dans tous les cas le nouveau produit est positif ou négatif suivant qu'il renferme un nombre pair ou impair de facteurs négatifs, c. q. f. d.

Exemple :

$$(-2)(3)(-4)(-5) = -120.$$

Du théorème que nous venons de démontrer résulte immédiatement le suivant :

THÉORÈME III

Un produit de plusieurs facteurs ne change pas si l'on intervertit d'une façon quelconque l'ordre des facteurs.

En effet, ni la valeur absolue, ni le signe du produit ne changent.

THÉORÈME IV

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué ; ou bien, inversement, on peut multiplier ensemble un nombre et un produit de plusieurs facteurs, en multipliant successivement le nombre par chacun de ces facteurs.

Ce théorème résulte du précédent comme en arithmétique.

36. — Voici quelques principes évidents :

1° *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

2° *Le produit d'un nombre par l'unité est égal à ce nombre.*

3° *Le produit d'un nombre par* -1, *c'est-à-dire par l'unité négative, est égal à ce nombre changé de signe.*

Aussi écrit-on souvent :

$$-a = (-1)\,a.$$

4° *En multipliant un même nombre par deux nombres symétriques, on obtient deux produits symétriques.*

5° *En remplaçant les deux facteurs d'un produit par leurs symétriques, on ne change pas le produit.*

37. — Un produit de n facteurs égaux à un même nombre a est la *puissance* n^{me} de a et s'écrit a^n*;* le nombre

arithmétique entier n est l'*exposant* de cette puissance.

Les puissances deuxième et troisième de a s'appellent respectivement le *carré* et le *cube* de a. Par convention, la première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

Les puissances de zéro sont toutes nulles.

Les puissances de 1 *sont toutes égales à* 1.

Les puissances d'un nombre positif sont toutes positives.

Les puissances de -1 *sont égales à* $+1$ *ou à* -1 *suivant que* n *est pair ou impair* (Th. II).

Aussi, en désignant par n un entier positif, écrit-on souvent :

$$-1 = (-1)^{2n+1},$$
$$+1 = (-1)^{2n}.$$

Les puissances d'un nombre négatif sont positives ou négatives suivant que l'exposant est pair ou impair (Th. II).

Les puissances de même exposant de deux nombres symétriques sont égales ou symétriques suivant que cet exposant est pair ou impair.

Exemple :

$$(-2)^2 = 4,$$
$$(-2)^3 = -8,$$
$$(-2)^4 = 16,$$
$$(-2)^5 = -32.$$

On démontrera, comme en arithmétique, les théorèmes suivants :

Théorème V

Le produit de diverses puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est égal à la somme des exposants qui correspondent aux divers facteurs.

En d'autres termes, on a :

$$a^p \times a^q \times a^r = a^{p+q+r}.$$

Il est bien entendu qu'au nombre a lui-même correspond l'exposant 1.

Corollaire. — *Pour élever une puissance* a^q *à la puissance* p, *il suffit de multiplier l'exposant* q *par le nouvel exposant* p.

En d'autres termes, on a :

$$(a^q)^p = a^{pq}.$$

THÉORÈME VI

Pour élever un produit de plusieurs facteurs à une certaine puissance, il suffit d'élever chacun de ces facteurs à cette puissance.

THÉORÈME VII

38. — Pour multiplier ensemble un polynôme algébrique et un nombre, on multiplie chacun des termes du polynôme par ce nombre, et l'on réunit ensemble tous ces produits partiels, chacun d'eux étant précédé du même signe que le terme correspondant du polynôme.

Nous diviserons la démonstration de ce théorème en plusieurs parties.

1° *Pour multiplier la somme de deux nombres par un nombre, on multiplie chacune des parties de la somme par le troisième nombre, et on ajoute les produits partiels ainsi obtenus.*

En d'autres termes, on a toujours :

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Nous appellerons a_0, b_0, c_0 les valeurs absolues de a, b, c.

Supposons d'abord a et b de même signe; la valeur absolue de $a+b$ est alors a_0+b_0 (**28**, 2°); la valeur absolue de $(a+b)c$ est donc $(a_0+b_0)c_0$, ou d'après une proposition connue d'arithmétique, $a_0c_0+b_0c_0$. Les nombres ac et bc sont de même signe et ont pour valeurs

absolues a_0c_0 et b_0c_0; la valeur absolue de $ac+bc$ est donc aussi $a_0c_0+b_0c_0$.

D'autre part, les nombres a, b, $a+b$ étant de même signe, il en est de même de ac, bc, $(a+b)c$ et aussi par suite de la somme $ac+bc$. Les nombres $(a+b)c$ et $ac+bc$, ayant même valeur absolue et même signe, sont égaux, c. q. f. d.

Supposons maintenant a et b de signes contraires; s'ils sont symétriques, il en est de même de ac et bc, et la proposition est évidente. Sinon, soit $a_0 > b_0$; la valeur absolue de $a+b$ est alors a_0-b_0 (**28**, 3°); celle de $(a+b)c$ est donc $(a_0-b_0)c_0$ ou $a_0c_0-b_0c_0$. Les nombres ac et bc sont de signes contraires et ont pour valeurs absolues a_0c_0 et b_0c_0; la valeur absolue de $ac+bc$ est donc aussi $a_0c_0-b_0c_0$, car on a $a_0c_0 > b_0c_0$.

D'autre part, $a+b$ a le signe de a, et par suite $(a+b)c$ le signe de ac; de même $ac+bc$ a le signe de ac. Les nombres $(a+b)c$ et $ac+bc$, ayant même valeur absolue et même signe, sont égaux, c. q. f. d.

2° *Pour multiplier une somme algébrique quelconque par un nombre, on multiplie chacune des parties de la somme par le nombre, et on ajoute les produits partiels ainsi obtenus.*

Cette proposition est vraie, d'après ce qui précède, pour une somme de deux nombres; supposons alors qu'elle soit vraie pour une somme de n nombres, et faisons voir qu'elle subsiste si l'on augmente d'une unité le nombre des parties de la somme : le théorème sera complètement démontré.

Soit donc $s=a+b+c+\ldots+h+k+l$ une somme de $n+1$ nombres; si nous appelons s' la somme $a+b+\ldots+h+k$ des n premiers, on a :

$$s=s'+l;$$

par suite, en appelant p le multiplicateur :

$$sp=(s'+l)p,$$

ou d'après ce qu'on vient de démontrer :

$$sp=s'p+lp.$$

Mais la proposition étant vraie par hypothèse pour une somme de n nombres, on a :

$$s'p = ap + bp + \dots + hp + kp,$$

et par suite :

$$sp = ap + bp + \dots + hp + kp + lp, \text{ c. q. f. d.}$$

3° Arrivons à la proposition générale énoncée au début, et soit à faire voir par exemple que l'on a :

$$(a - b - c + d - e)p = ap - bp - cp + dp - ep.$$

Si b', c' et e' sont symétriques de b, c, e, on a :

$$a - b - c + d - e = a + b' + c' + d + e',$$

et par suite, d'après ce qui précède :

$$(a - b - c + d - e)p = ap + b'p + c'p + dp + e'p;$$

mais $b'p$, $c'p$ et $e'p$ sont symétriques de bp, cp et ep; on a donc bien :

$$(a - b - c + d - e)p = ap - bp - cp + dp - ep,$$

c. q. f. d.

Théorème VIII

Pour multiplier ensemble deux polynômes algébriques, on multiplie chacun des termes de l'un par chacun des termes de l'autre; et l'on réunit ensemble tous ces produits partiels, chacun d'eux étant précédé du signe + ou du signe —, suivant qu'il représente le produit de deux termes précédés du même signe ou précédés de signes contraires. On obtient ainsi un nouveau polynôme algébrique qui représente le produit cherché.

Soit par exemple à multiplier $a - b + c$ par $d - e$; en vertu du théorème précédent, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}(a - b + c)(d - e) &= (a - b + c)d - (a - b + c)e \\ &= ad - bd + cd - (ae - be + ce) \\ &= ad - bd + cd - ae + be - ce.\end{aligned}$$

Le polynôme ainsi obtenu est précisément celui-ci qui résulte de la règle à démontrer. On ferait de même dans tous les cas.

On peut pratiquement énoncer le théorème sous la forme incorrecte, mais simple, suivante :

Pour multiplier ensemble deux polynômes algébriques, on les multiplie terme à terme, en observant que $+$ par $+$ et $-$ par $-$ donnent $+$, tandis que $+$ par $-$ et $-$ par $+$ donnent $-$.

Cette *règle des signes* est la même, naturellement, que celle qui sert à définir le signe du produit de deux nombres.

Exemple :

On a :

$$
\begin{aligned}
(3-5+7-8)(-7+4+5) = \; & -21+35-49+56 \\
& +12-20+28-32 \\
& +15-25+35-40 \\
= \; & -6.
\end{aligned}
$$

En appliquant le théorème précédent, on pourra calculer aisément sur des polynômes algébriques complexes dont les termes seraient eux-mêmes des produits de polynômes algébriques.

Enfin, remarquons que le théorème précédent se généralise de la façon suivante :

Théorème IX

Pour multiplier ensemble plusieurs polynômes algébriques, on fait la somme des produits partiels obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chaque polynôme, et observant la règle des signes.

Ce théorème vrai pour deux facteurs s'étend aisément à un nombre quelconque de facteurs en employant un mode de démonstration déjà rencontré.

39. — Les théorèmes précédents permettent, comme en arithmétique, d'énoncer les propositions suivantes :

1° *Le carré de la somme ou de la différence de deux*

nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres, augmentée ou diminuée de leur double produit :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

2° *Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés :*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

3° *Le cube de la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs cubes, augmentée de leur triple produit multiplié par leur somme :*

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b),$$

ce qu'on peut écrire encore :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

On en déduit :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

4° *Le cube de la différence de deux nombres est égal à la différence de leurs cubes, diminuée de leur triple produit multiplié par leur différence :*

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

ce qu'on peut écrire encore :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

On en déduit :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b)^2.$$

Remarque. — Cette dernière proposition ne diffère pas de la précédente ; si, en effet, dans la formule

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b),$$

on remplace b par son symétrique b', on a :

$$(a+b')^3 = a^3 + b'^3 + 3ab'(a+b');$$

mais

$$a + b' = a - b;$$
$$a'^3 + b'^3 = a^3 - b^3;$$
$$3ab'(a + b') = -3ab(a - b);$$

on a donc :

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Le procédé que nous venons d'appliquer ici est souvent employé pour modifier, au moins en apparence, une formule : on remplace un nombre quelconque m par son symétrique m'; la formule a encore lieu; puis on remplace m' par $-m$, et l'on obtient ainsi une nouvelle formule. Plus simplement on dit que l'on change m en $-m$.

5° *La différence des* m^{es} *puissances de deux nombres* a *et* b *peut se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est la différence* a — b *de ces nombres; d'une façon précise, on a :*

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + a^2b^{m-3} + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Si dans cette formule nous changeons b en $-b$, il vient, si m est pair,

$$a^m - b^m = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \dots - a^2b^{m-3} + ab^{m-2} - b^{m-1}),$$

et si m est impair,

$$a^m + b^m = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \dots + a^2b^{m-3} - ab^{m-2} + b^{m-1});$$

en effet, on a (37) :

$$b^{2q} = (-b)^{2q},$$
$$b^{2q+1} = -(-b)^{2q+1}.$$

40. — Voici enfin quelques propositions relatives aux égalités et inégalités.

1° *En multipliant les deux membres d'une égalité par un même nombre, on obtient encore une égalité.*

2° *En multipliant membre à membre deux ou plusieurs égalités, on obtient encore une égalité.*

3° *En élevant les deux membres d'une égalité à une même puissance, on obtient encore une égalité.*

4° *En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, ou en multipliant membre à membre une inégalité et une égalité dont les deux membres sont positifs, on obtient une inégalité de même sens.*

En d'autres termes, am est supérieur ou inférieur à bm en même temps que a est supérieur ou inférieur à b, *si* m *est positif.*

En effet, la différence $am - bm$, ou $(a - b)m$, a le signe de $a - b$ quand m est positif.

5° *En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, ou en multipliant membre à membre une inégalité et une égalité dont les deux membres sont négatifs, on obtient une inégalité de sens contraire.*

En d'autres termes, am est supérieur ou inférieur à bm en même temps que a est inférieur ou supérieur à b, *si* m *est négatif.*

En effet, la différence $am - bm$ ou $(a - b)\,m$ est de signe contraire à $a - b$ quand m est négatif.

On ne peut rien énoncer de général sur la multiplication des inégalités membre à membre : il faudra comparer les valeurs absolues et les signes des produits trouvés, ce qui se fera aisément, en se servant des propositions correspondantes de l'arithmétique et appliquant la règle des signes ; les propositions précédentes se démontreraient d'ailleurs sans difficulté de cette façon.

En particulier on peut dire que :

6° *En élevant les deux membres d'une inégalité à une même puissance d'exposant impair, on obtient encore une inégalité de même sens.*

En effet, si m est impair, a^m et b^m ont respectivement mêmes signes que a et b, et la valeur absolue de a^m est supérieure ou inférieure à celle de b^m en même temps que la valeur absolue de a est supérieure ou inférieure à celle de b.

7° *En élevant les deux membres d'une inégalité* $a > b$ *à une même puissance d'exposant pair, on obtient une*

inégalité de même sens ou de sens contraire suivant que la somme a + b *est positive ou négative; si cette somme est nulle, on obtient une égalité.*

En effet, m étant pair, a^m et b^m sont positifs ; pour que l'on ait $a^m > b^m$, il faut donc que la valeur absolue de a soit supérieure à celle de b, et par suite, puisque l'on a $a > b$, il faut d'abord que a soit positif; a étant positif et supérieur à b en valeur absolue, la somme $a + b$ est positive.

De même, si l'on a $a^m < b^m$, la somme $a + b$ est négative ; si l'on a $a^m = b^m$, la somme $a + b$ est nulle.

On peut raisonner différemment : supposons par exemple $m = 6$; d'après le n° 39 (5°), on peut écrire, en remarquant que l'on a $a^6 = (a^2)^3$, $b^6 = (b^2)^3$:

$$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2 b^2 + b^4);$$

la seconde parenthèse est un nombre essentiellement positif, puisque c'est une somme de puissances paires, et par suite $a^6 - b^6$ a le signe de $a^2 - b^2$, ou encore de $(a - b)(a + b)$; $a^6 - b^6$ a donc le signe de $a - b$ suivant que $a + b$ est un nombre positif ou négatif.

Remarquons que si a et b sont positifs tous deux, leur somme est aussi positive; s'ils sont négatifs tous deux, leur somme est négative.

Exemple. — Les inégalités

$$3 > 2, \quad 3 > -2, \quad 2 > -3, \quad -2 > -3,$$

donnent respectivement, en élevant au carré,

$$9 > 4, \quad 9 > 4, \quad 4 < 9, \quad 4 < 9,$$

et en élevant au cube :

$$27 > 8, \quad 27 > -8, \quad 8 > -27, \quad -8 > -27.$$

Ce qui précède montre bien qu'il faut prendre les plus grandes précautions, quand il s'agit de combiner les inégalités et égalités, non seulement par voie d'addition et de soustraction, mais encore par voie de multiplication.

§ 4. — Division des nombres algébriques. Fractions ou rapports algébriques.

41. — *Diviser* un nombre a, appelé *dividende*, par un autre b, appelé *diviseur*, c'est former un troisième nombre q, appelé *quotient*, qui, multiplié par b, reproduise a.

On écrit :

$$\frac{a}{b} = q,$$

et l'écriture $\frac{a}{b}$ s'appelle encore *fraction algébrique* ou *rapport algébrique :* dans ce cas, a et b reçoivent respectivement les noms de *numérateur* et de *dénominateur* de la fraction ou du rapport.

Pour justifier la définition précédente, il faut montrer que le nombre q existe et est unique.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut avant tout que le nombre b ne soit pas nul : le diviseur d'une division doit donc être supposé essentiellement différent de zéro.

b n'étant pas nul, il est clair que la valeur absolue de q sera le quotient exact (au sens arithmétique) des valeurs absolues de a et de b, et que le signe de q sera celui de b ou le signe contraire, suivant que le dividende a est positif ou négatif. Si a est nul, q est nul.

La justification annoncée est ainsi faite, et en même temps nous avons obtenu une règle pratique pour faire la division de deux nombres algébriques, savoir :

On divise exactement la valeur absolue du dividende par celle du diviseur, et le quotient obtenu est affecté du même signe que le diviseur ou du signe contraire, suivant que le dividende est positif ou négatif.

On voit que la règle des signes de la multiplication s'applique encore à la division : deux nombres de même signe ont un quotient positif; deux nombres de signes contraires ont un quotient négatif.

Exemple :

$$\frac{(+5)}{(+9)}=\frac{5}{9},$$

$$\frac{(+5)}{(-9)}=-\frac{5}{9},$$

$$\frac{(-5)}{(+9)}=-\frac{5}{9},$$

$$\frac{(-5)}{(-9)}=\frac{5}{9}.$$

42. — La division des nombres algébriques est l'opération qui correspond en algèbre à la division *exacte* en arithmétique. Ecrire :

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ou} \quad a=bq,$$

sont deux choses équivalentes.

Nous allons étendre directement, en partant de la définition, aux rapports algébriques les propriétés des rapports arithmétiques; remarquons, d'ailleurs, que l'on pourrait faire cette extension en partant de ces dernières propriétés et de la règle de division des nombres algébriques.

1° *Le rapport d'un nombre à l'unité est ce nombre lui-même.*

2° *Le rapport d'un nombre à* — 1 *est égal à ce nombre changé de signe.*

3° *En remplaçant l'un des termes d'un rapport par son symétrique, on obtient un nouveau rapport symétrique du premier.*

4° *On ne change pas un rapport en en remplaçant les deux termes par leurs symétriques.*

5° *Le rapport de deux nombres égaux est égal à l'unité.*

6° *Le rapport de deux nombres symétriques est égal à* — 1.

7° *Si* m *est supérieur à* n, *le rapport des puissances* m^e *et* n^e *du nombre* a *est égal à* a^{m-n}.

8° *Pour diviser un polynôme algébrique par un nombre, on divise chacun des termes par ce nombre.*

En d'autres termes on a :

$$\frac{a-b+c}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}.$$

En effet, d'après le théorème VII (38), on a :

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)m=a-b+c.$$

9° *En multipliant ou divisant les deux termes d'un rapport* $\frac{a}{b}$ *par un même nombre* m, *non nul, on obtient un nouveau rapport égal au premier.*

Montrons que l'on a :

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b};$$

soit $\frac{a}{b}=q$, d'où $a=bq$;

multipliant les deux membres de cette égalité par m, il vient :

$$am=bqm,$$

d'où :

$$\frac{am}{bm}=q=\frac{a}{b}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

On a aussi :

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{a}{b},$$

car le second rapport se déduit du premier en multipliant les deux termes de celui-ci par m.

De cette proposition on déduira comme en arithmétique :

10° *On peut réduire plusieurs rapports à un même dénominateur quelconque.*

11° *Pour obtenir la somme ou la différence de deux rapports* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}$, $\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{d}}$ *de même dénominateur, il suffit de former un nouveau rapport qui ait le même dénominateur* d, *et et pour numérateur la somme ou la différence des numérateurs* a *et* a'.

Car si l'on a :

$$\frac{a}{d} = q, \frac{a'}{d} = q',$$

d'où $$a = dq, a' = dq',$$

on en tire par addition ou soustraction :

$$a \pm a' = dq \pm dq' = d(q \pm q'),$$

d'où $$\frac{a \pm a'}{d} = q \pm q', \quad \text{c. q. f. d.}$$

En appliquant cette proposition, on pourra mettre sous forme d'un rapport unique un polynôme arithmétique dont les différents termes sont des rapports quelconques.

12° *Pour multiplier entre eux deux rapports, il suffit de multiplier entre eux les numérateurs et les dénominateurs de ces deux rapports.*

En effet, si l'on a :

$$\frac{a}{b} = q, \quad \frac{a'}{b'} = q',$$

d'où $$a = bq, a' = b'q';$$

on en tire, par multiplication :

$$aa' = bb'qq',$$

d'où $$\frac{aa'}{bb'} = qq', \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ce théorème s'étend sans peine à un produit de plusieurs facteurs et aux puissances.

13° *Pour obtenir le quotient de deux rapports, il suffit de multiplier le premier rapport par le second renversé.*

Car si $$\frac{a}{b}=q, \quad \frac{a'}{b'}=q',$$

on a d'après ce qui précède :

$$\frac{ab'}{a'b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ab'}{a'b}=\frac{q}{q'}.$$

L'*inverse* d'un nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$; ces deux nombres sont toujours de même signe.

L'inverse d'un rapport $\frac{a}{b}$ est donc le rapport renversé $\frac{b}{a}$.

Remarquons que diviser un nombre par un autre ou le multiplier par l'inverse de celui-ci sont deux opérations équivalentes.

14° *Si plusieurs rapports* $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ *sont égaux, un rapport tel que* $\frac{a-a'+a''+\ldots}{b-b'+b''+\ldots}$, *obtenu en combinant de la même façon par voie d'addition ou de soustraction les numérateurs et les dénominateurs des rapports donnés, est égal à la valeur commune de ces rapports.*

En effet, si l'on a :

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=q,$$

la combinaison des égalités

$$a=bq, \quad a'=b'q, \quad a''=b''q, \ldots$$

donne

$$a-a'+a''+\ldots=bq-b'q+b''q+\ldots$$
$$=(b-b'+b''+\ldots)q,$$

d'où :

$$\frac{a-a'+a''+\ldots}{b-b'+b''+\ldots}=q, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Il est clair d'ailleurs que, pour appliquer ce théorème, on peut commencer par multiplier ou diviser l'un quel-

conque des rapports donnés par un même nombre non nul. C'est ainsi que les égalités

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=q$$

entraînent

$$\frac{ma \pm m'a'}{bm \pm m'b'}=q.$$

15° Si comme en arithmétique on appelle *proportion* l'égalité de deux rapports, et si l'on emploie les expressions *moyens* et *extrêmes* dans le même sens, on verra comme en arithmétique que :

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Réciproquement, *si quatre nombres* a, b, c, d *sont tels que l'on ait l'égalité* ad=bc, *ces quatre nombres sont en proportion de huit façons différentes.*

Une proportion étant donnée, on obtient une nouvelle proportion lorsqu'on échange entre eux les deux extrêmes, ou bien les deux moyens, ou bien encore lorsque l'on fait à la fois ces deux opérations.

La proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *entraîne les suivantes :*

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}, \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Et ainsi de suite.

Les expressions de *quatrième proportionnelle* et *troisième proportionnelle* seront employées comme en arithmétique.

43. — Relativement aux égalités et inégalités, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

1° *En divisant les deux membres d'une égalité par un même nombre, ou en divisant un même nombre par les deux membres d'une égalité, ou encore en divisant membre à membre deux égalités, on obtient une égalité.*

Il est bien entendu qu'on suppose ne rencontrer aucune division dont le diviseur serait zéro.

2° *En divisant les deux membres d'une inégalité par un même nombre, on obtient une égalité de même sens ou de sens contraire, suivant que ce nombre est positif ou négatif.*

Car diviser par m revient à multiplier par $\frac{1}{m}$.

3° *En divisant un même nombre* m *par les deux membres* a *et* b *d'une inégalité, on obtient une nouvelle égalité de même sens ou de sens contraire, suivant que le produit* mab *est négatif ou positif.*

En effet, multiplions les deux membres de $a > b$ par $\frac{m}{ab}$, quantité qui a même signe que mab; si mab est positif, il vient $\frac{m}{b} > \frac{m}{a}$; et si mab est négatif, il vient $\frac{m}{b} < \frac{m}{a}$. Donc, dans le second cas on a :

$$\frac{m}{a} > \frac{m}{b},$$

et dans le premier :

$$\frac{m}{a} < \frac{m}{b}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Sur la division des inégalités membre à membre, on ne peut rien dire de général : on fera comme à propos de la multiplication.

44. — On peut imaginer que l'on ait à faire plusieurs multiplications et divisions successives : il faudra par exemple multiplier a par b, puis diviser le produit ainsi formé par c, puis diviser le quotient obtenu par d, enfin multiplier ce nouveau quotient par e. Si p est le résultat de ces opérations, on a :

$$p = \frac{\frac{ab}{c}}{d} \times e.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de développer au sujet de telles expressions une théorie de tout point semblable à celle des polynômes algébriques : il suffit de se

rappeler que diviser par m ou multiplier par $\frac{1}{m}$ sont des opérations identiques.

Donc, en particulier, on peut intervertir à volonté l'ordre des opérations; etc. Dans l'exemple ci-dessus, on peut écrire :

$$p=\frac{be}{d}\times\frac{a}{c}=\frac{\frac{b}{d}\times e}{c}\times a=\frac{abe}{cd}, \qquad \text{etc.}$$

Donnons un exemple de calcul numérique sur les nombres algébriques.

Soit à calculer l'expression suivante :

$$\frac{(-2)(-4)+(-3)(-5)}{6+7}\times\frac{3\times(-4)}{-5+\frac{78}{-6-7}}.$$

Ceci devient successivement :

$$\frac{8+15}{13}\times\frac{-12}{-5-\frac{78}{13}},$$

ou

$$\frac{23}{13}\times\frac{12}{5+6},$$

et finalement

$$\frac{276}{143}.$$

§ 5. — Racines des nombres algébriques.

45. — On appelle *racine* m^{me} ou *racine d'indice* m d'un nombre a, un nombre a' qui, élevé à la puissance m, reproduit a : le nombre m est, bien entendu, entier et positif.

D'après ce qui a été dit au nº **37**, il est clair que :

1° Si m est impair, le nombre a' existe et est unique; il a pour valeur absolue la racine m^{me} arithmétique de la valeur absolue de a, et pour signe le signe de a. On écrit

comme en arithmétique, en employant la notation des *radicaux :*

$$a' = \sqrt[m]{a}.$$

Exemple :

$$6 = \sqrt[3]{216}, \qquad -6 = \sqrt[3]{-216}.$$

2° Si m est pair, et si a est négatif, il n'existe pas de nombre a'.

3° Si m est pair, et si a est positif, il existe deux nombres a', égaux et de signes contraires, ayant chacun pour valeur absolue la racine m^{me} arithmétique de a.

Si l'on représente cette racine arithmétique par $\sqrt[m]{a}$, on a donc :

$$a' = \sqrt[m]{a} \text{ ou bien } a' = -\sqrt[m]{a};$$

plus brièvement, on écrit :

$$a' = \pm\sqrt[m]{a},$$

en énonçant *plus ou moins racine* m^{me} *arithmétique de* a, au second membre.

S'il n'y a pas à craindre d'ambiguïté, on supprime le mot *arithmétique*, afin d'abréger le discours.

Exemple. — Si a' est défini par la condition $a'^4 = 256$, on a :

$$a' = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 4.$$

Comme en arithmétique, les racines seconde et troisième s'appellent racine carrée et racine cubique; l'indice 2 des radicaux carrés ne s'écrit pas; un nombre a peut être considéré comme sa racine d'indice 1, $\sqrt[1]{a}$; si l'on envisage un radical tel que $\sqrt[m]{a^p}$, p est l'*exposant* de ce radical.

46. — Pour calculer sur les racines d'indice quelconque des nombres algébriques, il suffit, d'après ce qui précède, de savoir calculer sur les nombres $\sqrt[m]{a}$, que l'on peut appeler *radicaux algébriques*, puisque a peut recevoir des valeurs négatives lorsque m est impair.

Nous avons étudié en arithmétique les règles du calcul des *radicaux arithmétiques;* nous allons rappeler ces règles, et voir dans quelle mesure elles s'appliquent aux radicaux algébriques. Pour obtenir ce dernier résultat, il nous suffira de remarquer : 1° qu'un radical algébrique d'indice pair est un radical arithmétique; 2° qu'il en est de même d'un radical algébrique d'indice impair, portant sur un nombre positif; 3° qu'un radical algébrique d'indice impair, portant sur un nombre négatif, est égal au radical arithmétique de même indice portant sur la valeur absolue de ce nombre, changé de signe; en d'autres termes, si m est impair, on a :

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}.$$

1° *On ne change pas la valeur d'un radical arithmétique en multipliant par un même nombre entier l'indice et l'exposant de ce radical; on ne change pas non plus la valeur d'un radical arithmétique dont l'indice et l'exposant sont des multiples d'un même nombre entier, en divisant l'indice et l'exposant par ce nombre.*

En d'autres termes, pour les radicaux arithmétiques, on a la formule

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}.$$

Ce théorème subsiste pour les radicaux algébriques, excepté dans le cas où, a étant négatif, p et m sont impairs, et n pair. Alors l'égalité précédente n'a lieu qu'au signe près.

Par exemple, on a :

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[6]{729}.$$

De ce théorème résulte la théorie de l'équivalence des radicaux, et de la réduction de plusieurs radicaux au même indice, et en particulier, au plus petit indice commun. S'il s'agit de radicaux algébriques, les mêmes théories s'appliqueront, en ayant soin de tenir compte de l'exception précitée.

2° *Le produit de plusieurs radicaux arithmétiques de*

même indice est un radical arithmétique de même indice portant sur le produit des quantités placées sous les radicaux donnés.

Le théorème analogue a lieu pour le rapport de deux radicaux arithmétiques, et pour une puissance d'un radical arithmétique.

En d'autres termes, on a, pour les radicaux arithmétiques, les formules :

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc},$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \qquad (\sqrt[m]{a})^p=\sqrt[m]{a^p}.$$

Ces propositions subsistent entièrement pour les radicaux algébriques.

3° *Le double radical arithmétique* $\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}$ *est égal au radical arithmétique* $\sqrt[mp]{a}$.

Ce théorème subsiste encore pour les radicaux algébriques ; car, si a est négatif, il faut que m et p soient impairs, sans quoi les expressions considérées n'auraient pas de sens.

En particulier, il résulte des règles précédentes combinées avec celles du calcul des puissances, que si l'on a un nombre quelconque a, qui doit être successivement élevé à des puissances données et placé sous des radicaux d'indices donnés, on peut, comme en arithmétique, intervertir à volonté l'ordre des opérations, à condition que les symboles employés aient un sens.

Exemple. — On a :

$$\left(\sqrt[r]{\sqrt[q]{(a^m)^p}}\right)^s=\sqrt[q]{\left(\sqrt[r]{(a^p)^s}\right)^m}=\sqrt[qr]{a^{mps}}.$$

Si maintenant les radicaux que l'on rencontre successivement sont susceptibles de réduction, il faudra faire ces réductions, mais en prenant les précautions nécessaires pour ne pas commettre d'erreurs de signes.

47. — Donnons quelques exemples simples qui nous montreront bien les précautions à prendre quand il s'agit

des racines des nombres algébriques et des radicaux algébriques.

1° Soit à calculer le produit $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b}$.

On réduit les radicaux au même indice; ils deviennent $\pm\sqrt[6]{a^2}$ et $\sqrt[6]{b^3}$, le premier étant précédé du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que a est positif ou négatif; on a donc :

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = \pm\sqrt[6]{a^2 b^3}.$$

2° Soit à simplifier $\sqrt[4]{a^7}$.

On a :

$$\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^4 \times a^3} = \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{a^3} = a\sqrt[4]{a^3};$$

ici il n'y a pas d'ambiguïté parce que a est nécessairement positif.

Mais s'il s'agissait de simplifier $\sqrt[4]{a^6}$, on aurait, si a est positif :

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a};$$

si a est négatif, la même simplification ne s'applique pas, car $\sqrt{a^3}$ et $\sqrt{a}$ n'ont pas de sens; on remarque alors que $a^6 = (-a)^6$, et par suite :

$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{(-a)^3} = -a\sqrt{-a}.$$

3° Soit la proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

En combinant comme en arithmétique les numérateurs et les dénominateurs de la même façon, on aura par exemple :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \pm\frac{\sqrt{a^2 - a'^2 + aa'}}{\sqrt{b^2 - b'^2 + bb'}} = \frac{\sqrt[3]{a^3 + a'^3 - 35a^2a'}}{\sqrt[3]{b^3 + b'^3 - 35b^2b}}.$$

On choisira le signe $+$ ou le signe $-$ devant le troisième membre, suivant que les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont po-

sitifs ou négatifs; les quantités placées sous les radicaux carrés doivent être positives; si d'ailleurs l'une d'elles l'est, il en est de même de l'autre, puisque leur rapport est $\frac{a^2}{b^2}$.

C'est ainsi que de

$$\frac{3}{-4}=\frac{-6}{8},$$

on déduit :

$$\frac{3}{-4}=\frac{-6}{8}=-\frac{\sqrt{6^2-3^2}}{\sqrt{8^2-4^2}}=\frac{\sqrt[3]{3^3-6^3}}{\sqrt[3]{-4^3+8^3}}.$$

4° Si l'on étend aux nombres algébriques la notion de *moyenne proportionnelle* ou *moyenne géométrique* en disant que c est la moyenne proportionnelle entre deux nombres a et b quand on a la proportion

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{b}, \quad \text{d'où } c^2=ab,$$

on voit que deux nombres a et b ne peuvent avoir une moyenne proportionnelle que s'ils sont de même signe, et alors ils en ont deux, égales l'une à $+\sqrt{ab}$ et l'autre à $-\sqrt{ab}$.

Remarquons en passant que les notions de *moyenne arithmétique* et de *moyenne harmonique* s'étendent d'elles-mêmes aux nombres algébriques.

5° On voit tout de suite que *l'égalité* $\mathrm{a}=\mathrm{b}$ *conduit à l'égalité* $\sqrt[m]{\mathrm{a}}=\sqrt[m]{\mathrm{b}}$; de même, *l'inégalité* $\mathrm{a}>\mathrm{b}$ *entraîne l'inégalité* $\sqrt[m]{\mathrm{a}}>\sqrt[m]{\mathrm{b}}$; mais il faut bien remarquer qu'il s'agit ici, si m est pair, des racines m^{mes} positives de a et b; par suite il faudrait bien se garder de conclure de l'inégalité $a^2>b^2$ par exemple, la nouvelle inégalité $a>b$; ceci n'est vrai que si a est positif; si a est négatif, on a au contraire $a<b$.

Remarque. — On peut résumer les précautions à prendre en disant que *si* m *est pair, on a* $\sqrt[m]{\mathrm{a}^m}=\mathrm{a}$ *ou*

bien $\sqrt[m]{a^m} = -a$, *suivant que* a *est positif ou négatif.*

48. — **Remarque générale.** — Il résulte de tout ce chapitre que les opérations sur les nombres algébriques se font toutes à l'aide des opérations de l'arithmétique et en observant certaines règles pour les signes. Il est clair que, comme en arithmétique, il serait intéressant d'étudier spécialement les propriétés des nombres algébriques entiers ou des fractions algébriques à termes entiers : nous n'entrerons pas dans cette voie qui ne nous offrirait rien d'essentiellement nouveau, puisque ce sont les valeurs absolues des nombres qui joueraient alors le rôle prépondérant. Nous dirons seulement qu'on appelle *diviseur* d'un nombre algébrique entier a tout nombre algébrique b dont la valeur absolue divise celle de a; ainsi 4 et -4 sont des diviseurs de -16 et de $+16$.

De même, on dit d'un nombre algébrique entier ou fractionnaire que c'est une puissance m^{me} parfaite, lorsqu'il en est de même de sa valeur absolue, et que sa racine m^{me} existe; ainsi -216 est un cube parfait; -16 n'est pas un carré parfait.

Exercices

1. — Calculer la valeur de la somme $P - Q + R$, en désignant par P, Q, R, les trois polynômes :

$$5a^3b + 6a^2b^2 - 7b^4,$$
$$-18a^4 - 7a^2b^2 + 8ab^3,$$
$$27a^4 - 9a^3b + 18ab^3 - 15b^4,$$

où les lettres a et b désignent respectivement les nombres -3 et -2.

2. — P, Q, R désignant les mêmes polynômes que précédemment, mais les lettres a et b représentant les nombres 3 et -4, calculer le produit P^3Q^2R.

3. — P, Q, R désignant les mêmes polynômes que précédemment, mais les lettres a et b représentant les nombres $-\frac{5}{4}$ et $\sqrt{2}$, calculer le rapport $\frac{P-R}{Q+R}$.

4. — Calculer la valeur du nombre :

$$\sqrt{a(b+c-a)}+\sqrt{b(a+c-b)}+\sqrt{c(a+b-c)},$$

en supposant que les lettres a, b, c désignent les nombres -3, -5 et -7.

5. — Calculer les valeurs des nombres :

$$a^2d^2+4ac^3+4b^3d-3b^2c^2-6abcd,$$
$$(ad-bc)^2-4(ac-b^2)(bd-c^2),$$
$$\frac{1}{a^2}\left\{4(ac-b^2)^3+(a^2d-3abc+2b^3)^2\right\},$$

pour $a=-1$, $b=3$, $c=-4$, $d=6$.

6. — Calculer la valeur du rapport :

$$\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{a^2b+ab^2+a^2c+ca^2+bc^2+b^2c+2abc}$$

pour $a=3$, $b=-2$, $c=-4$.

7. — Calculer la valeur du nombre :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{4}}}$$

pour $p=-5$, $q=2$.

8. — Calculer les valeurs des nombres :

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \quad \text{et} \quad 1+a+\frac{a^2}{(1-a)\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-a^2}}\right)}$$

pour $a=-\frac{1}{100}$.

9. — Calculer les valeurs des nombres :

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \text{ et } a+b+c$$

pour $a=-5$, $b=7$, $c=-\frac{3}{2}$.

10. — Calculer la valeur du nombre :

$$\frac{3+a}{3-a}-\frac{2+a}{2-a}-\frac{1+a}{1-a}-1$$

pour $a=\frac{3}{2}$.

CHAPITRE III

USAGE DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

49. — D'après la façon même dont nous avons introduit la notion des nombres algébriques, il est clair que l'usage de ces nombres s'impose de lui-même dès que l'on est amené à considérer des grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents, telles que les longueurs, les temps, les températures, etc.

Pour résoudre les questions sur de telles grandeurs, il est nécessaire, si l'on ne veut faire usage que de considérations arithmétiques, de distinguer autant de cas qu'il y a de façons de compter les grandeurs en jeu dans un sens ou dans l'autre, et d'établir des formules propres à chaque cas; nous allons montrer dans ce chapitre, par un certain nombre d'exemples, qu'au contraire, en faisant usage des nombres algébriques à l'aide de conventions convenables, il est possible, en général, de réunir tous les cas en un seul et par suite d'obtenir une formule unique ou un système unique de formules pour chaque question.

50. Exemple I. — Soit une droite X'X, et un point fixe O sur cette droite (*fig.* 8). Pour définir la position

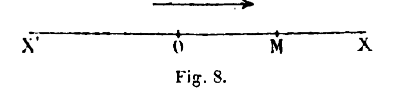


Fig. 8.

d'un point M sur cette droite, il faut se donner la distance OM, ou encore le nombre qui mesure cette distance, après qu'on a fait choix d'une unité de longueur, et en outre, il faut se donner le sens de OM, c'est-à-dire savoir si M est à droite ou à gauche de O.

Si maintenant nous choisissons un sens positif sur la

droite donnée, le sens X'X par exemple, il est clair que pour définir la position du point M, il suffira de se donner la valeur algébrique du segment $\overline{OM}$. Si cette valeur est égale à 2, on portera deux fois l'unité de longueur à droite de O et on obtiendra ainsi le point M ; si cette valeur est égale à — 2, on portera deux fois l'unité de longueur à gauche de O, et l'on obtiendra ainsi le point M. La valeur algébrique du segment $\overline{OM}$ est ce qu'on appelle l'*abscisse* du point M ; la position d'un point sur X'X est complètement déterminée par son abscisse.

51. — Considérons une longueur AB sur une droite X'X

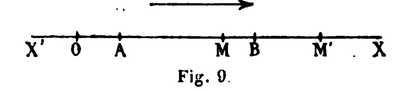


Fig. 9.

(*fig.* 9) ; on sait qu'il existe deux points M et M' sur AB, tels que, k étant un nombre arithmétique donné, on ait :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = k;$$

l'un de ces points, M par exemple, est situé entre A et B ; l'autre, M', est situé sur AX' ou sur BX.

Choisissons maintenant un sens positif sur X'X et considérons les deux segments $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$; ils sont de sens contraires, et par suite leur rapport, c'est-à-dire celui de leurs valeurs algébriques, est négatif, égal à $-k$; de même les segments $\overline{M'A}$ et $\overline{M'B}$ sont de même sens, et leur rapport est positif, égal à k.

L'introduction des nombres négatifs nous permet donc d'énoncer la proposition précise suivante :

Etant donnés deux points A *et* B *sur une droite* X'X, *il existe toujours un point* M *et un seul sur cette droite, tel que le rapport des deux segments* $\overline{MA}$ *et* $\overline{MB}$ *soit égal à un nombre algébrique donné* m.

Il n'y a exception que pour $m = 1$: dans ce cas le point M n'existe pas ; quand m tend vers 1, le point M s'éloigne indéfiniment sur X'X.

Pour $m = 0$, on obtient le point A ; pour $m = -1$, on a le milieu de AB ; quand m augmente en valeur absolue au delà de toute limite, le point M se rapproche indéfiniment de B.

Les deux points M et M′ qui correspondent à des valeurs de m égales et de signes contraires, sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B.

Proposons-nous, connaissant les abscisses $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ des points A et B, de calculer l'abscisse $\overline{OM} = x$ du point M qui partage AB dans le rapport m.

D'après un principe connu, on a :

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM},$$

ce que l'on peut énoncer ainsi :

La valeur algébrique d'un segment est égale à l'abscisse de son extrémité moins l'abscisse de son origine.

De même, on a :

$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM},$$

et par suite, x est déterminé par la relation

$$\frac{a - x}{b - x} = m.$$

On en tire successivement :

$$a - x = m(b - x),$$
$$x(1 - m) = a - mb,$$
$$x = \frac{a - mb}{1 - m};$$

telle est la valeur cherchée.

Remarquons que les transformations que nous venons d'effectuer ne sont légitimes que si m est différent de 1, et x de b.

Mais : 1° si m est égal à 1, le point M n'existe pas;

2° x ne peut pas être supposé égal à b, puisque alors $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ n'a pas de sens.

On voit avec quelle facilité nous avons obtenu cette formule qui est vraie dans tous les cas possibles.

Pour $m = -1$, on obtient :

$$x = \frac{a+b}{2};$$

donc, *l'abscisse du milieu d'un segment est égale à la moyenne arithmétique des abscisses de son origine et de son extrémité.*

On pourra, comme exercice, vérifier directement cette proposition dans tous les cas de figure possibles.

52. Exemple II. — Pour définir la position d'un point M dans un plan, on peut procéder de la façon suivante (*fig.* 10) :

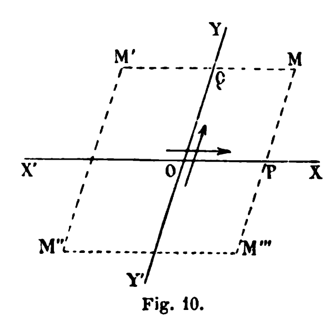


Fig. 10.

Traçons dans ce plan deux droites X'X et Y'Y qui se coupent en O ; par M menons une parallèle à Y'Y qui coupe X'X en P et une parallèle à X'X qui coupe Y'Y en Q ; il est clair que si l'on connaît les points P et Q, on connaît le point M, puisque pour l'obtenir, il suffit de mener par P et Q des parallèles à Y'Y et à X'X et de prendre leur point d'intersection.

D'après ce qui précède, pour déterminer commodément les points P et Q, on choisira des sens positifs sur les droites X'X, Y'Y, soient les sens X'X et Y'Y, et l'on se donnera les valeurs algébriques des segments $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$. Ces segments, ou plutôt leurs valeurs algébriques, s'appellent respectivement l'*abscisse* et l'*ordonnée* du point M; ensemble ce sont les *coordonnées* du point M; les droites X'X et Y'Y sont les *axes de coordonnées;* le point O est l'*origine des coordonnées.* La position du point M dans le plan est complètement déterminée par ses deux coordonnées.

La figure montre suffisamment que pour un point situé

dans l'angle XOY, les deux coordonnées sont positives; pour un point situé dans l'angle X′OY, l'abscisse est négative et l'ordonnée positive; pour un point situé dans l'angle X′OY′, les deux coordonnées sont négatives; pour un point situé dans l'angle XOY′, l'abscisse est positive et l'ordonnée négative; pour un point de l'axe des abscisses X′X, l'ordonnée est nulle; pour un point de l'axe des ordonnées Y′Y, l'abscisse est nulle.

On voit encore que pour construire le point M, connaissant ses deux coordonnées, on peut construire d'abord le point P, puis par ce point mener une parallèle à Y′Y et prendre sur cette parallèle, à partir de P, au-dessus ou au-dessous de X′X suivant que l'ordonnée donnée est positive ou négative, une longueur PM mesurée par la valeur absolue de cette ordonnée.

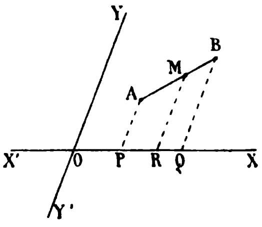


Fig. 11.

53. — Soient dans le plan deux points A et B (*fig.* 11) de coordonnées (a, b) pour le premier, (a', b') pour le second, et cherchons les coordonnées x et y du point M, situé sur AB, qui partage $\overline{AB}$ dans le rapport m.

A cet effet, soient $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, les abscisses des points A, B, M; quelle que soit la disposition de la figure, R est ou n'est pas entre P et Q en même temps que M, et un théorème connu permet par suite d'écrire :

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m.$$

On est donc ramené à une question résolue plus haut, et l'on obtient, puisque $\overline{RP} = a - x$, $\overline{RQ} = a' - x$,

$$x = \frac{a - ma'}{1 - m}.$$

On aurait de même :

$$y = \frac{b - mb'}{1 - m}.$$

En particulier pour $m = -1$, on a :

$$x = \frac{a + a'}{2}, \qquad y = \frac{b + b'}{2};$$

le milieu de $\overline{\text{AB}}$ *a pour coordonnées les moyennes arithmétiques des coordonnées de même nom de* A *et de* B.

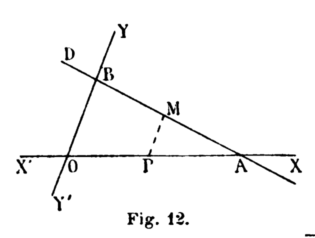


Fig. 12.

54. — Soit une droite D qui rencontre les axes de coordonnées en A et B (*fig.* 12). Appelons a le segment $\overline{\text{OA}}$ et b le segment $\overline{\text{OB}}$; soient aussi x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la droite D.

Si m désigne le rapport $\frac{\overline{\text{MA}}}{\overline{\text{MB}}}$, on a, puisque les coordonnées de A sont $(a, 0)$, tandis que celles de B sont $(0, b)$, en vertu des formules précédentes :

$$x = \frac{a}{1 - m}, \qquad y = \frac{-mb}{1 - m},$$

d'où :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{1 - m} - \frac{m}{1 - m} = 1.$$

Ainsi les coordonnées (x, y) d'un point quelconque de la droite vérifient la relation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

et cela quel que soit le point M sur D, quelle que soit aussi la position de la droite D par rapport aux axes.

On pourra, comme exercice, vérifier directement cette

proposition par l'emploi direct de la géométrie, dans tous les cas de figure possibles.

Dans le cas de la figure par exemple, soit $\overline{OP}$ l'abscisse de M; on a :

$$\frac{MP}{\overline{OB}}=\frac{AP}{\overline{AO}},$$

d'où :

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a},$$

ou bien :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Réciproquement, tout point dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

appartient à la droite D; en effet, appelons y' l'ordonnée du point de la droite D qui a pour abscisse x; en vertu de la proposition directe, on a :

$$\frac{x}{a}+\frac{y'}{b}=1;$$

cette relation comparée à celle qui forme l'hypothèse donne $y'=y$, et par suite le point considéré appartient bien à D.

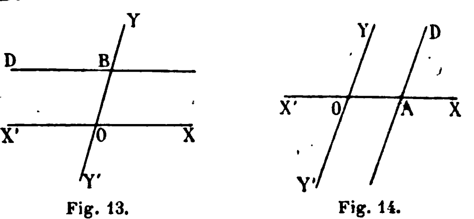


Fig. 13.

Fig. 14.

Si une droite D est parallèle à X'X, tous ses points ont même ordonnée, $\overline{OB}$ (*fig.* 13).

Si une droite D est parallèle à Y'Y, tous ses points ont même abscisse, $\overline{OA}$ (*fig.* 14).

Si une droite D passe par l'origine O des coordonnées (*fig.* 15), on démontrera aisément que le rapport $\frac{y}{x}$ des coordonnées de l'un quelconque de ses points est constant, positif si la droite est dans les angles XOY, X'OY', négatif dans le cas contraire.

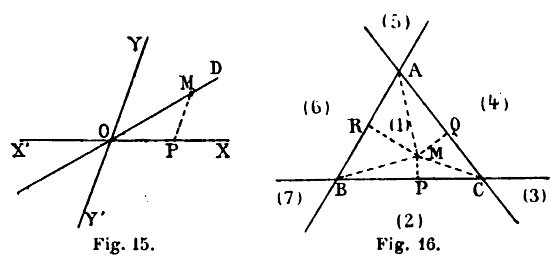


Fig. 15. Fig. 16.

55. Exemple III. — Soit un triangle ABC (*fig.* 16); les côtés prolongés déterminent dans le plan sept régions distinguées sur la figure par des numéros.

Soient a, b, c, S les nombres arithmétiques qui mesurent les côtés BC, CA, AB et la surface du triangle; soit M un point quelconque du plan, et MP, MQ, MR les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés BC, CA, AB.

Supposons M situé à l'intérieur du triangle ABC, dans la région (1); en menant MA, MB, MC, et en écrivant que la somme des surfaces des triangles MBC, MCA, MAB est égale à S, on obtient immédiatement la relation

$$a \times \text{MP} + b \times \text{MQ} + c \times \text{MR} = 2\text{S}.$$

Si M est dans la région (2), on a de même :

$$-a \times \text{MP} + b \times \text{MQ} + c \times \text{MR} = 2\text{S}.$$

Si M est dans la région (5), on a de même :

$$a \times \text{MP} - b \times \text{MQ} - c \times \text{MR} = 2\text{S};$$

et ainsi de suite.

Ceci posé, appelons p, q, r les valeurs algébriques des distances MP, MQ, MR, obtenues en regardant MP par exemple comme positive ou négative suivant que M

est ou n'est pas du même côté que A par rapport à BC, et faisant une convention analogue pour MQ et MR. Il est facile alors de vérifier que, quelle que soit la position du point M dans le plan, on a toujours la relation

$$ap + bq + cr = 2S.$$

Cette unique formule convient à tous les cas.

Si le triangle est équilatéral, on a :

$$p + q + r = \frac{2S}{a};$$

$\frac{2S}{a}$ est d'ailleurs la hauteur du triangle.

Si le triangle est isocèle et si M est pris sur la base BC, on a $p = 0$, et par suite puisque $b = c$,

$$q + r = \frac{2S}{b};$$

$\frac{2S}{b}$ est d'ailleurs une hauteur du triangle.

56. Exemple IV. — Soit un angle droit XOY (*fig.* 17 et 18) et sur les demi-droites OX, OY deux points fixes P

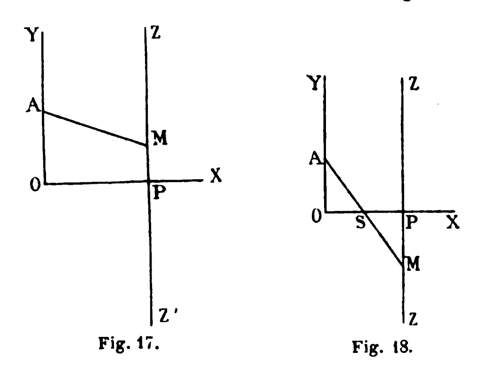


Fig. 17. Fig. 18.

et A; par P menons une parallèle Z'Z à OY, et prenons sur cette droite un point variable M. On considère la surface limitée par le contour OAMP et on demande le volume qu'elle engendre en tournant autour de OX.

La position du point M peut être déterminée par la valeur algébrique du segment $\overline{PM}$, compté positivement dans le sens Z'Z ; on a deux cas de figure suivant que $\overline{PM}$ est positif ou négatif.

Soit $OA = a$, $OP = h$, $\overline{PM} = x$; a et h sont des nombres positifs, x un nombre positif ou négatif ; enfin appelons V le volume cherché.

Dans la figure 17, V est le volume d'un tronc de cône de hauteur h, les rayons des bases étant a et x; par suite, on a :

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(a^2 + ax + x^2\right).$$

Dans la figure 18, où x est négatif, V est la somme des volumes des deux cônes engendrés par la rotation des triangles AOS et MPS autour de OX, en appelant S le point où AM rencontre OX. Donc :

$$V = \frac{\pi}{3}\left(OS \times \overline{OA}^2 + PS \times \overline{PM}^2\right).$$

D'ailleurs on a :

$$\frac{OS}{OA} = \frac{PS}{PM} = \frac{OP}{OA + PM};$$

ici $PM = -x$, et par suite :

$$OS = h\frac{a}{a - x}, \quad PS = h\frac{-x}{a - x},$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \frac{a^3 - x^3}{a - x} = \frac{\pi h}{3}\left(a^2 + ax + x^2\right).$$

On voit que la formule qui donne V est la même dans tous les cas.

Le volume qui correspond au cas de la figure 18 s'appelle ordinairement tronc de cône de deuxième espèce, par opposition au tronc de cône proprement dit qui reçoit la qualification de première espèce.

57. — Nous avons dit précédemment qu'il était possible, *en général*, par l'usage des nombres algébriques

pour mesurer les grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens, d'obtenir une formule unique pour résoudre les divers cas d'une même question. Il n'en est pas toujours ainsi, en effet, et nous allons le montrer sur un exemple voisin du précédent.

Gardant les données du numéro précédent, soit à calculer la surface S engendrée par la rotation de la ligne AM autour de OX.

Dans le cas de la figure 17, cette surface est la surface latérale d'un tronc de cône, et par suite on a :

$$S = \pi AM(AO + MP),$$

ou

$$S = \pi(a+x)\sqrt{h^2 + (a-x)^2},$$

car on a évidemment :

$$AM = \sqrt{h^2 + (a-x)^2},$$

et cela que x soit supérieur ou inférieur à a.

Dans le cas de la figure 18, S est la somme des surfaces latérales des deux cônes déjà considérés, et par suite :

$$S = \pi(OA \times AS + PM \times SM);$$

or, on a :

$$\frac{AS}{OA} = \frac{SM}{MP} = \frac{AM}{OA + PM};$$

d'ailleurs
$$AM = \sqrt{\overline{OP}^2 + (OA + PM)^2},$$

et comme $PM = -x$, il vient :

$$AS = \frac{a\sqrt{h^2 + (a-x)^2}}{a-x},$$

$$SM = -\frac{x\sqrt{h^2 + (a-x)^2}}{a-x},$$

$$S = \pi\sqrt{h^2 + (a-x)^2}\,\frac{a^2 + x^2}{a-x}.$$

Cette formule est tout à fait différente de celle que nous avons obtenue dans le premier cas.

58. Exemple V. — On sait comment on mesure les températures à l'aide d'un thermomètre centigrade gradué en degrés, dans les deux sens à partir de 0°, température de la glace fondante. Par suite, si n est le nombre de degrés qui correspond à une température déterminée, on dit que la température est de n degrés au-dessus ou au-dessous de zéro, suivant les cas. Plus simplement, on peut convenir de mesurer la température par le nombre algébrique que l'on obtient en affectant le nombre arithmétique n du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'on se trouve au-dessus et au-dessous de zéro : un seul nombre algébrique définit donc, grâce à cette convention, la température.

Ceci posé, on sait que l'on appelle *coefficient de dilatation linéaire* d'une règle solide, le rapport constant qui existe entre l'allongement ou le raccourcissement de cette règle, à partir de 0°, quand la température monte ou descend, et sa longueur à 0°, divisé par la valeur absolue de la température exprimée en degrés. Donc, si l_0 est la longueur de la règle à 0°, l sa longueur à la température t, t étant un nombre algébrique, m le coefficient de dilatation, on a, dans tous les cas, la formule générale :

$$\frac{l - l_0}{l_0 t} = m,$$

d'où

$$l = l_0 (1 + mt).$$

De même, si l' est la longueur de la règle à la température t', on a :

$$l' = l_0 (1 + mt'),$$

d'où

$$l' = l \frac{1 + mt'}{1 + mt},$$

et cela quels que soient les nombres t et t', positifs ou négatifs.

59. Exemple VI. — Soit une droite X'X (*fig.* 19); à un certain instant un mobile se trouve en M sur la

droite ; on demande quelle est sa position à une époque donnée, sachant qu'il se meut d'un *mouvement uniforme*, c'est-à-dire qu'il parcourt des distances égales pendant des temps égaux, en allant toujours dans le même sens.

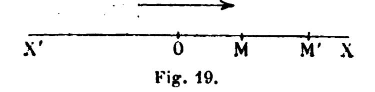


Fig. 19.

Nous fixerons la position du mobile sur la droite comme au n° 50, en choisissant un sens positif sur X'X, et un point fixe O sur cette droite ; la valeur algébrique du segment $\overline{OM}$ définit complètement le point M ; nous l'appellerons a.

De même, si M' est la position cherchée du mobile, nous définirons M' par la valeur algébrique x du segment $\overline{OM'}$.

Le temps est une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens, avant ou après un instant particulier, appelé origine du temps.

Il est donc commode de mesurer le temps à un instant donné par un nombre algébrique, savoir le nombre arithmétique qui mesure l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'origine du temps et l'instant donné, affecté du signe + ou du signe —, suivant que l'instant donné est postérieur ou antérieur à l'origine du temps. De cette façon, à chaque époque particulière correspond un nombre algébrique, et réciproquement.

Ceci posé, nous appellerons t_0 la mesure algébrique du temps au moment où le mobile est en M, et t sa mesure algébrique à l'époque donnée, époque qui peut précéder ou suivre l'époque t_0.

Le mobile est animé d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire qu'il parcourt toujours des distances égales pendant des temps égaux ; si donc il parcourt pendant l'unité de temps une distance mesurée par V, il parcourra, pendant un intervalle de temps mesuré par T, une distance mesurée par VT. Mais pour connaître complètement la loi du déplacement du mobile, il faut encore savoir dans quel sens

il se déplace sur X'X ; nous affecterons donc du signe + ou du signe — le nombre arithmétique V, suivant que le mobile se déplace dans le sens positif X'X ou dans le sens contraire, et si v est le nombre algébrique ainsi obtenu, nous dirons que v est la mesure algébrique de la vitesse du mobile. Il est clair que, connaissant v, on connaît la loi du déplacement du mobile.

Ceci posé, il est évident que la longueur MM′ est mesurée par le produit des valeurs absolues de v et de l'intervalle de temps $(t - t_0)$.

D'autre part le segment $\overline{MM'}$ est manifestement positif : 1° si v est positif, et si l'époque t est postérieure à t_0; 2° si v est négatif, et si l'époque t est antérieure à t_0; le segment $\overline{MM'}$ est négatif : 1° si v est positif et si l'époque t est antérieure à t_0; 2° si v est négatif et si l'époque t est postérieure à t_0. Comme d'ailleurs le nombre $t - t_0$ est positif ou négatif suivant que l'époque t est postérieure ou antérieure à l'époque t_0, on voit, d'après la règle des signes pour la multiplication, que, dans tous les cas, la valeur algébrique du segment $\overline{MM'}$ est égale au produit des deux nombres algébriques v et $t - t_0$. Ainsi, on a toujours :

$$\overline{MM'} = v\,(t - t_0).$$

D'ailleurs

$$\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'},$$

et par suite

$$x = a + v\,(t - t_0);$$

telle est la formule cherchée ; elle convient à tous les cas possibles.

Application. — Un train qui fait 60 kilomètres à l'heure va de Bordeaux à Paris ; à onze heures du matin il passe à Tours ; on demande à quelle distance de Paris il était à huit heures du matin, sachant que la distance de Paris à Tours est de 250 kilomètres.

Comptons les distances positivement de Paris vers Bordeaux, à partir de Paris ; prenons pour unités de longueur et de temps le kilomètre et l'heure ; prenons enfin pour

origine du temps le minuit où commence le jour considéré. On a ici :

$$a = 250, \quad t_0 = 11, \quad t = 8, \quad v = -60,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} x &= 250 + (-60)(8 - 11) \\ &= 250 + 60 \times 3 \\ &= 250 + 180 = 430. \end{aligned}$$

La distance cherchée est de 430 kilomètres.

60. **Exemple VII.** — Soit une droite verticale X'X et un point A sur cette droite (*fig.* 20). Supposons d'abord qu'un point matériel pesant soit lancé en A, à un certain instant, suivant la verticale descendante AX avec une vitesse initiale V, ce qui veut dire que, si le point n'était pas pesant, il décrirait AX d'un mouvement uniforme avec la vitesse V; on sait qu'après un intervalle de temps T, à partir du moment de sa chute, il occupe une position M sur AX telle que $AM = VT + \frac{1}{2} GT^2$, G étant un nombre, appelé accélération de la pesanteur, égal, à Paris, à 9,81, si l'on prend le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps.

X'
H
M'
A
M''
M
X

Fig. 20.

Si donc on compte les segments positivement dans le sens X'X à partir d'un point quelconque O, et si l'on appelle a et x les valeurs algébriques des segments $\overline{OA}$ et $\overline{OM}$; si, en outre, on compte les temps comme précédemment, et si l'on appelle t_0 et t les nombres algébriques qui correspondent au moment de la chute et au moment où le point est en M, on aura, comme plus haut, la relation générale:

$$(1) \qquad x = a + V(t - t_0) + \frac{1}{2} G (t - t_0)^2.$$

On remarquera que V, G et $t - t_0$ sont des nombres arithmétiques, car l'époque t est nécessairement postérieure à l'époque t_0.

Si l'on comptait les segments positivement dans le sens XX′, on aurait, en appelant toujours a et x les segments $\overline{OA}$ et $\overline{OM}$,

$$(2)\ x = a - V(t - t_0) - \frac{1}{2} G (t - t_0)^2.$$

Supposons maintenant que le point soit lancé en A, à l'époque t_0, suivant la verticale ascendante AX′ avec la vitesse initiale V; on sait qu'il s'élève jusqu'à une hauteur AH égale à $\frac{V^2}{2G}$, et qu'il atteint cette hauteur au bout d'un temps égal à $\frac{V}{G}$; ensuite il retombe, comme si on l'abandonnait au point H sans vitesse initiale. D'ailleurs, au bout d'un intervalle de temps T′, à partir de l'époque t_0, il occupe, si T′ est inférieur à $\frac{V}{G}$, une position M′ telle que

$$AM' = VT' - \frac{1}{2} GT'^2;$$

et, d'après ce qui précède, au bout d'un intervalle de temps T″ après le moment où il était en H, il occupe une position M″ telle que

$$HM'' = \frac{1}{2} GT''^2.$$

Ceci posé, comptons les segments positivement dans le sens X′X à partir d'un point quelconque O; appelons a le segment $\overline{OA}$, et x le segment $\overline{OM'}$ ou $\overline{OM''}$, suivant le cas, qui définit la position du point matériel à l'époque t, nécessairement postérieure à l'époque t_0.

Si $t - t_0$ est inférieur à $\frac{V}{G}$, on a :

$$x = \overline{OM'} = \overline{OA} + \overline{AM'};$$

d'ailleurs

$$\overline{OA} = a,\ \overline{AM'} = -\left(V(t - t_0) - \frac{1}{2} G (t - t_0)^2\right).$$

Donc :

$$(3) \quad x = a - V(t - t_0) + \frac{1}{2} G (t - t_0)^2.$$

Si $t - t_0$ est supérieur à $\frac{V}{G}$, on a :

$$x = \overline{OM''} = \overline{OA} + \overline{AH} + \overline{HM''};$$

d'ailleurs

$$\overline{OA} = a, \overline{AH} = -\frac{V^2}{2G}, \overline{HM''} = \frac{1}{2} G \left(t - t_0 - \frac{V}{G}\right)^2.$$

Donc :

$$x = a - \frac{V^2}{2G} + \frac{1}{2} G \left(t - t_0 - \frac{V}{G}\right)^2.$$

Comme :

$$\left(t - t_0 - \frac{V}{G}\right)^2 = (t - t_0)^2 - \frac{2V}{G}(t - t_0) + \frac{V^2}{G^2},$$

il vient simplement, après réduction,

$$x = a - V(t - t_0) + \frac{1}{2} G (t - t_0)^2;$$

on obtient donc la même formule (3) que précédemment.

Si l'on comptait les segments dans le sens XX', on aurait de la même façon, en appelant toujours a le segment $\overline{OA}$, et x le segment $\overline{OM'}$ ou $\overline{OM''}$:

$$(4) \quad x = a + V(t - t_0) - \frac{1}{2} G (t - t_0)^2;$$

les nombres V et G sont des nombres arithmétiques comme plus haut.

Convenons maintenant de mesurer l'accélération de la pesanteur par un nombre algébrique g, égal à $+$ G ou à $-$ G suivant que l'on compte les segments positivement dans le sens de la verticale descendante (celui de l'action de la pesanteur), ou en sens contraire; de même, mesurons la vitesse initiale du mobile par un nombre algébrique v, égal à $+$ V ou à $-$ V, suivant que cette vitesse est dirigée dans le sens des segments positifs ou en sens

inverse; alors on voit que les formules (1), (2), (3), (4) deviennent l'unique formule :

$$x = a + v(t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2.$$

Cette formule embrasse donc tous les cas possibles du mouvement vertical d'un point matériel pesant.

Application. — En un point A situé à 300 mètres au-dessous du sol, on lance suivant la verticale ascendante un mobile animé d'une vitesse initiale de 100 mètres par seconde. On demande à quelle hauteur au-dessus du sol sera ce mobile au bout de 16 secondes.

Gardant les unités déjà indiquées, comptons les segments positivement suivant la verticale ascendante à partir du sol; alors, dans la formule générale, il faut faire :

$$a = -300, \; v = 100, \; g = -9{,}81, \; t - t_0 = 16,$$

et par suite, il vient :

$$x = -300 + 100 \times 16 - \frac{1}{2} 9{,}81 \times \overline{16}^2$$
$$= 44{,}32.$$

Le mobile sera à $44^{m},32$ au-dessus du sol; il sera d'ailleurs en train de redescendre, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

61. Exemple VIII. — Voici un dernier exemple, emprunté à la vie pratique. Une personne reçoit ou débourse pour une raison quelconque une somme A; son avoir devient V + A ou V — A, suivant le cas, en appelant V son avoir primitif. Si l'on convient de mesurer la somme A par un nombre algébrique a, égal au nombre arithmétique A affecté du signe + ou du signe —, suivant qu'elle correspond à une recette ou à une dépense, on voit que dans tous les cas l'avoir de la personne est $V + a$.

Application. — Deux personnes possèdent respectivement a francs et b francs. Combien la première doit-elle donner à la seconde ou recevoir de la seconde pour que les fortunes des deux personnes deviennent dans un rapport donné m?

Soit x le nombre algébrique qui mesure la somme reçue ou donnée par la première personne; on doit avoir dans tous les cas :

$$\frac{a+x}{b-x}=m,$$

d'où

$$a+x=m(b-x),$$
$$x(1+m)=mb-a,$$
$$x=\frac{mb-a}{1+m}.$$

Suivant que le nombre $mb-a$ sera positif ou négatif, x sera lui-même positif ou négatif : la seconde personne donnera ou recevra.

On voit que nous n'avons pas eu besoin de distinguer deux cas et de chercher lequel de ces deux cas était possible.

Exercices

1. — Calculer les abscisses des points qui divisent un segment dans les rapports $-\frac{4}{9}$ et $+\frac{4}{9}$, sachant que les abscisses de l'origine et de l'extrémité de ce segment sont respectivement égales à -5 et $+7$.

2. — Calculer en fonction des abscisses a et b des points A et B la distance des points qui divisent harmoniquement le segment $\overline{AB}$ dans les rapports m et $-m$.

3. — Si $\overline{AB}$ est un segment divisé harmoniquement par les points M et M′, et si I est le milieu de AB, on a :

$$\overline{IA}^2=\overline{IM}\times\overline{IM'}.$$

4. — Gardant les mêmes hypothèses, le segment $\overline{AB}$ est moyen harmonique entre les segments $\overline{AM}$ et $\overline{AM'}$; en d'autres termes, on a :

$$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{AM}}+\frac{1}{\overline{AM'}}\right).$$

5. — Chercher la relation qui doit exister entre les abscisses de quatre points A, B, C, D, en ligne droite pour que les deux derniers divisent harmoniquement le segment $\overline{AB}$.

6. — Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, on a toujours la relation

$$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AC} \times \overline{DB} + \overline{AD} \times \overline{BC} = 0.$$

7. — Etant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, on a toujours la relation

$$\overline{AD}^2 \times \overline{BC} + \overline{BD}^2 \times \overline{CA} + \overline{CD}^2 \times \overline{AB} + \overline{BC} \times \overline{CA} \times \overline{AB} = 0.$$

8. — Si A, B, C, D,... sont des points en ligne droite, on a toujours les relations

$$\frac{1}{\overline{AB} \times \overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BC} \times \overline{BA}} \times \frac{1}{\overline{CA} \times \overline{CB}} = 0,$$

$$\frac{1}{\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BA} \times \overline{BC} \times \overline{BD}} + \frac{1}{\overline{CA} \times \overline{CB} \times \overline{CD}}$$

$$+ \frac{1}{\overline{DA} \times \overline{DB} \times \overline{DC}} = 0,$$

et ainsi de suite.

9. — Si A, B, C, D,... M, N, P,... sont deux groupes de points tous en ligne droite, on a toujours les relations :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = 1,$$

$$\frac{\overline{AM} \times \overline{AN}}{\overline{AB} \times \overline{AC}} + \frac{\overline{BM} \times \overline{BN}}{\overline{BA} \times \overline{BC}} + \frac{\overline{CM} \times \overline{CN}}{\overline{CA} \times \overline{CB}} = 1,$$

$$\frac{\overline{AM} \times \overline{AN} \times \overline{AP}}{\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD}} + \frac{\overline{BM} \times \overline{BN} \times \overline{BP}}{\overline{BA} \times \overline{BC} \times \overline{BD}} + \frac{\overline{CM} \times \overline{CN} \times \overline{CP}}{\overline{CA} \times \overline{CB} \times \overline{CD}}$$

$$+ \frac{\overline{DM} \times \overline{DN} \times \overline{DP}}{\overline{DA} \times \overline{DB} \times \overline{DC}} = 1,$$

et ainsi de suite.

10. — Etant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, soit m le rapport $\dfrac{\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}}{\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}}$; exprimer en fonction de m les rapports analogues

$$\frac{\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DC}}}{\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}} \text{ et } \frac{\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BD}}}{\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CD}}}.$$

11. — Calculer les coordonnées du point de rencontre des médianes d'un triangle, connaissant les coordonnées des trois sommets.

(On s'appuie sur ce que le point de rencontre des médianes d'un triangle est situé au tiers de chacune d'elles à partir de la base.)

12. — Quelle est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque d'une circonférence ayant pour centre l'origine et dont on connaît le rayon? (On supposera que les deux axes de coordonnées sont perpendiculaires.)

13. — Quelle est la valeur de la distance de deux points dont on connaît les coordonnées ? (On supposera encore les coordonnées rectangulaires.)

14. — Quelle est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque d'une circonférence ayant pour centre un point de coordonnées connues, et dont on connaît le rayon? (On supposera encore les coordonnées rectangulaires.)

15. — Deux mobiles décrivent la droite X'X d'un mouvement uniforme. Quel est à chaque instant l'espace qui les sépare? Quand se rencontrent-ils?

16. — On laisse tomber une pierre dans un puits dont la profondeur est égale à a; au bout de combien de temps entendra-t-on le bruit de la pierre rencontrant l'eau, si l'on appelle v la vitesse du son? (On sait que le son se propage d'un mouvement uniforme.)

Application : $a = 30$, $v = 340$. (Les unités de longueur et de temps sont le mètre et la seconde).

17. — Deux points A et B sont définis par leurs coordonnées dans un système d'axes rectangulaires; soit en outre M un point de l'axe OX. Former dans tous les cas possibles l'expression de la surface du triangle AMB. Une seule formule suffit-elle pour résoudre la question?

18. — Déterminer un point dans l'espace par trois coordonnées en employant des considérations analogues à celles du n° **52**. (On emploie comme axes de coordonnées trois droites X'X, Y'Y, Z'Z non situées dans un même plan et qui se coupent en un même point O. Par le point M donné on mène des plans parallèles aux plans OYZ, OZX, OXY; etc.)

Généraliser le résultat du n° **53**.

19. — Appliquer au tétraèdre des considérations analogues à celles du n° **55** relatives au triangle.

20. — Soit un parallélogramme OABC, OA étant une diagonale; montrer qu'en faisant une convention convenable, on peut dire que M, étant un point quelconque du plan, la surface du triangle MOA est égale à la somme des surfaces des triangles MOB et MOC.

CHAPITRE IV

CALCUL ALGÉBRIQUE

§ 1er. — Introduction des expressions algébriques. Généralités sur le calcul algébrique.

62. — Dans tout ce qui précède, comme en arithmétique, nous avons toujours employé les lettres pour représenter des nombres *déterminés*. Un des caractères propres de l'algèbre est l'emploi des lettres pour représenter des nombres *indéterminés* ou *variables*.

On appelle *expression algébrique* un ensemble de nombres et de lettres réunis entre eux par des signes d'addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines; les lettres représentent des nombres quelconques, et les signes indiquent les opérations à effectuer sur les nombres qui figurent explicitement dans l'expression algébrique, ou qui y sont représentés par des lettres.

Voici des exemples d'expressions algébriques :

$$a^3 - b^3, \quad -3a^2b^3c^5, \quad a^2b^4\sqrt[3]{7}, \quad \frac{ab - c^2}{ab + c^2},$$
$$\sqrt{ab} + \sqrt[3]{a^5b^2}, \quad 5ab + c\sqrt{-7a}.$$

On appelle *valeur numérique* d'une expression algébrique pour un système de valeurs numériques déterminées attribuées aux lettres qui y figurent, le nombre algébrique que l'on obtient en remplaçant les lettres par les nombres correspondants, et faisant alors les opérations indiquées, d'après les règles du calcul des nombres algébriques.

Ainsi pour $a = -4$, $b = 3$, la valeur numérique de $a^3 - b^3$ est $-64 - 27$ ou -91.

Observons que l'on ne doit attribuer aux lettres que des

valeurs rendant possibles les opérations, c'est-à-dire qui donnent un sens aux signes employés. Par suite, si l'expression contient des signes radicaux à indices pairs, les lettres ne pourront représenter que des nombres tels que les quantités placées sous ces radicaux soient positives ou nulles; de même, si l'expression contient des indications de divisions, les lettres ne pourront représenter que des nombres tels que les quantités placées en diviseur ne deviennent pas nulles. C'est ainsi que dans la dernière des expressions prises ci-dessus comme exemples, a ne peut représenter qu'un nombre négatif ou nul.

On dit que deux expressions algébriques A et B sont *identiques*, et l'on représente ce fait par l'*identité*

$$A \equiv B,$$

lorsqu'elles contiennent les mêmes lettres, et que leurs valeurs numériques sont égales pour tous les systèmes de valeurs que l'on peut attribuer aux lettres.

Ainsi les expressions $(a - b)(a + b)$ et $a^2 - b^2$ sont identiques.

Il en est encore de même des expressions $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ et $a + b$, en remarquant que, dans la première expression, a et b ne peuvent pas recevoir des valeurs numériques égales.

Mais les expressions $a + b$ et $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ ne sont pas identiques; car leurs valeurs numériques ne sont égales que si $a + b$ prend une valeur positive ou nulle; sinon, elles sont égales et de signes contraires.

Une expression algébrique est *identiquement nulle* lorsqu'elle prend la valeur zéro pour tous les systèmes de valeurs que l'on peut attribuer aux lettres.

63. — Si l'on écrit l'une à la suite de l'autre deux expressions algébriques A et B, en les séparant par le signe $+$, on forme une nouvelle expression algébrique $A + B$ qui est la somme des deux premières, parce que sa valeur numérique est toujours la somme des valeurs numériques de A et B, quel que soit le système de valeurs numériques attribuées aux lettres.

Ainsi la somme des expressions $\sqrt{a^3b}$ et $a^6 - b^4 + \frac{a^3}{b^2}$ est la nouvelle expression

$$\sqrt{a^3b} + \left(a^6 - b^4 + \frac{a^3}{b^2}\right).$$

De même, $A - B$, AB, $\frac{A}{B}$ sont de nouvelles expressions algébriques que l'on appelle différence, produit ou rapport des expressions A et B ; $\sqrt[m]{A}$ est une expression qui, élevée à la puissance m^{me}, reproduit A, parce qu'il en est de même des valeurs numériques ; si m est pair, cette expression a toujours une valeur numérique positive, et l'expression $-\sqrt[m]{A}$ élevée à la m^{me} puissance reproduit aussi A.

Il résulte clairement de ces définitions que l'on peut calculer sur les expressions algébriques absolument comme sur les nombres algébriques, puisque pour chaque système particulier de valeurs numériques attribuées aux lettres c'est en réalité sur des nombres que porte le calcul.

Toutes les propositions du chapitre II s'étendent donc sans exception au *calcul algébrique*, c'est-à-dire au calcul des expressions algébriques, ce qui n'est autre chose que l'art de transformer les expressions algébriques en expressions identiques.

Insistons sur un exemple, afin de bien faire comprendre ce qui précède.

Soient A, B, C, D, quatre expressions algébriques ; les expressions $(A - B)(C - D)$ et $AC - AD - BC + BD$ sont identiques : en effet, supposons que les lettres reçoivent des valeurs numériques quelconques, assujetties seulement à rendre les opérations indiquées possibles ; A, B, C, D prennent alors des valeurs numériques a, b, c, d ; la valeur numérique de $(A - B)(C - D)$ est $(a - b)(c - d)$; celle de $AC - AD - BC + BD$ est $ac - ad - bc + bd$; mais, a, b, c, d étant des nombres, on a :

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd;$$

ainsi, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les expressions $(A-B)(C-D)$ et $AC-AD-BC+BD$ prennent même valeur numérique et par suite sont identiques. On raisonnera de même dans tous les cas possibles, et l'on voit bien par suite que l'on peut appliquer toutes les règles du calcul des nombres au calcul des expressions.

64. — Le calcul algébrique est illimité. Il faut souvent déployer quelque habileté et faire preuve de sagacité pour mettre une expression algébrique donnée sous une forme équivalente, la plus simple ou la plus élégante possible, ou pour reconnaître l'identité de deux expressions algébriques qui se présentent sous des aspects absolument différents.

Ajoutons, d'ailleurs, que l'habitude facilite singulièrement ce travail : aussi est-il indispensable d'étudier avec soin les exemples que nous donnerons, et de traiter un grand nombre d'exercices.

Les règles à appliquer sont, nous l'avons déjà dit, celles du calcul des nombres algébriques. Nous allons les reprendre cependant en partie, pour les appliquer à une classe spéciale d'expressions algébriques que nous définirons tout à l'heure, les monômes et les polynômes entiers. Ces expressions, d'une forme particulièrement simple, jouent, en algèbre, un rôle prépondérant : on peut d'ailleurs, le plus souvent, ramener les questions sur les expressions quelconques à des questions sur les polynômes entiers en représentant par une seule lettre nouvelle une expression complexe, et raisonnant, ce qui est légitime, sur cette lettre comme sur une lettre ordinaire pouvant recevoir toutes les valeurs numériques. Donnons tout de suite un exemple simple de ce procédé : soit l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{(a+b)^2}-\sqrt[3]{(a-b)^2}}{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}};$$

si l'on pose $\sqrt[3]{a+b}\equiv a'$, $\sqrt[3]{a-b}\equiv b'$, l'expression s'écrit

sous la forme $\frac{a'^2 - b'^2}{a' - b'}$ et est identique à $a' + b'$; ceci veut dire que pour toutes les valeurs numériques attribuées à a' et b', telles que la différence $a' - b'$ ne soit pas nulle, $\frac{a'^2 - b'^2}{a' - b'}$ et $a' + b'$ prennent même valeur numérique. Donc, évidemment, l'expression donnée est identique à $\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, c'est-à-dire prend même valeur numérique que cette dernière expression quelles que soient les valeurs numériques attribuées à a et b, en excluant bien entendu celles qui donnent $a + b = a - b$, ou $b = 0$.

65. — Une expression algébrique est dite *rationnelle* si elle ne contient pas de signes radicaux portant sur des lettres; sinon elle est *irrationnelle*.

Une expression algébrique rationnelle ou irrationnelle est dite *entière* quand elle ne contient pas de signes de division portant sur des diviseurs littéraux; sinon elle est *fractionnaire*.

On voit que, dans les expressions entières et rationnelles, on peut toujours attribuer aux lettres tous les systèmes possibles de valeurs numériques; il n'en est pas de même en général pour les autres expressions.

On appelle *monôme* une expression algébrique entière et rationnelle dans laquelle il n'y a aucun signe d'addition ni de soustraction; un monôme est donc un produit de facteurs numériques ou littéraux écrits dans un ordre quelconque. On peut grouper ces facteurs de façon à remplacer les facteurs numériques par leur produit effectué, appelé *coefficient* du monôme, et à remplacer plusieurs facteurs représentés par la même lettre par une puissance de cette lettre.

Donc tout monôme aura une forme telle que :

$$5a^7b^4c^2d^3 \text{ ou } -5a^3b^2c^4;$$

les coefficients de ces deux monômes sont respectivement 5 et — 5; le signe — qui figure dans le second n'est pas un signe d'opération.

Nous supposerons toujours un monôme écrit sous la forme précédente.

On appelle *polynôme entier* ou simplement *polynôme* une expression formée de monômes séparés par les signes + ou —.

L'expression

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

est un polynôme.

On peut toujours considérer comme positifs les coefficients des monômes qui figurent dans un polynôme, car on a par exemple :

$$a^3 + (-5b^3) \equiv a^3 - 5b^3,$$

d'après les règles du calcul algébrique, identiques à celle du calcul des nombres algébriques.

On peut toujours aussi considérer un polynôme comme une somme algébrique de monômes ; ainsi l'on a :

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \equiv a^4 + (-4a^3b) + 6a^2b^2 + (-4ab^3) + b^4.$$

Cette façon de considérer les polynômes est souvent employée, sans qu'il soit nécessaire d'écrire le polynôme explicitement sous forme de somme.

On appelle *binômes* et *trinômes* les polynômes qui ont respectivement deux et trois termes.

66. — Deux monômes *semblables* sont deux monômes qui ne diffèrent que par leurs coefficients, tels que $-7a^3b^2c$ et $8a^3b^2c$.

Dans un polynôme, il peut exister plusieurs termes semblables ; il est clair que l'on peut remplacer ces termes par un seul, semblable aux précédents, ayant pour coefficient la somme des coefficients des termes considérés : ceci suppose que l'on considère le polynôme comme une *somme* de termes.

Exemple :

$$3a^4b^2 - 5a^3b + 16a^3b - 8a^4b^2 - 7a^3b$$
$$\equiv (3-8)a^4b^2 + (-5+16-7)a^3b$$
$$\equiv -5a^4b^2 + 4a^3b.$$

Faire cette opération pour tous les groupes de termes semblables d'un polynôme s'appelle effectuer la *réduction des termes semblables*. On doit toujours écrire un polynôme sous sa forme réduite, de façon qu'il ne contienne plus aucun terme semblable à un autre.

Nous admettrons que deux polynômes identiques, c'est-à-dire qui prennent même valeur numérique, quels que soient les nombres par lesquels on remplace les lettres, sont aussi identiques de forme, c'est-à-dire composés des mêmes termes (après réduction des termes semblables).

La démonstration de ce théorème est facile, mais sa place n'est pas dans un ouvrage élémentaire.

En particulier, un polynôme qui a pour valeur numérique zéro, quels que soient les nombres par lesquels on remplace les lettres, c'est-à-dire qui est *identiquement nul*, renferme un seul terme, *zéro*.

67. — Le *degré* d'un monôme par rapport à une lettre est l'exposant de cette lettre dans le monôme écrit comme nous l'avons dit au n° **65** ; le degré d'un monôme par rapport à certaines lettres est la somme des exposants de ces lettres dans le monôme; le degré total, ou simplement degré d'un monôme, est la somme des exposants de toutes les lettres qui y figurent. Il est bien entendu que, dans l'application de ces définitions, on regarde la lettre a toute seule comme affectée de l'exposant 1.

Le degré de $-5a^3b^2cd^4$ par rapport à a est 3; son degré par rapport à a et b est 5; son degré total est 10.

Le degré d'un polynôme par rapport à une lettre est le plus grand des degrés des différents termes du polynôme par rapport à cette lettre. On définit de même le degré d'un polynôme par rapport à plusieurs lettres et son degré total ou simplement degré.

Il est bien entendu que le degré d'un terme par rapport à une lettre qui n'y figure pas est zéro.

Le degré du polynôme

$$5x^3 - 7y^2 + 8x^7y^4 - 27 - z^3$$

par rapport à x est 7 ; son degré par rapport à y et z est 4 ; son degré total est 11.

Un polynôme est *homogène* par rapport à certaines lettres, quand tous ses termes sont de même degré par rapport à ces lettres ; ce degré commun est le degré d'homogénéité du polynôme par rapport à ces lettres.

On dit simplement que le polynôme est *homogène*, quand il est homogène par rapport à toutes les lettres qui y figurent.

Le polynôme

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

est homogène et du troisième degré.

Un polynôme est dit *ordonné* par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une lettre x appelée *lettre ordonnatrice*, lorsque, après réduction des termes semblables, ces termes se trouvent rangés de telle façon que leurs degrés par rapport à x aillent constamment en diminuant ou en augmentant.

Lorsqu'il s'agit de polynômes ordonnés par rapport à une lettre x, il est convenable de considérer les autres lettres comme représentant des nombres déterminés ; chaque terme du polynôme se présentera alors comme le produit d'une puissance de x par un coefficient qui pourra être lui-même un polynôme par rapport aux autres lettres.

Exemple. — Soit le polynôme du troisième degré :

$$\begin{gathered} 5x^3 + 7y^3 - 8z^3 + 3x^2y - 3x^2z + 5xy^2 - 7y^2z \\ + 3xz^2 - 6yz^2 + 27xyz - 5x^2 - 3y^2 - 9z^2 + 6xy + 4yz \\ - 3xz + x + y - z + 4. \end{gathered}$$

Ordonnons-le par rapport aux puissances décroissantes de x; nous l'écrirons sous la forme :

$$\begin{gathered}5x^3+(3y-3z-5)x^2\\+(5y^2+3z^2+27yz+6y-3z+1)x\\+7y^3-8z^3-7y^2z-6yz^2-3y^2-9z^2+4yz+y-z+4.\end{gathered}$$

Les coefficients eux-mêmes peuvent être ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de y, et l'on obtient la nouvelle expression identique :

$$\begin{gathered}5x^3+[3y+(-3z-5)]x^2\\+[5y^2+(27z+6)y+(3z^2-3z+1)]x\\+[7y^3+(-7z-3)y^2+(-6z^2+4z+1)y\\+(-8z^3-9z^2-z+4)].\end{gathered}$$

Les coefficients des puissances de y sont eux-mêmes des polynômes ordonnés suivant les puissances de z.

Soit un polynôme homogène par rapport à deux lettres; il est clair, que s'il est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de l'une de ces lettres, il l'est aussi par rapport aux puissances croissantes de l'autre; tel le polynôme :

$$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4.$$

Remarque. — Nous venons de voir comment l'on pouvait être amené à considérer pour un instant dans un polynôme certaines lettres comme représentant des nombres déterminés.

Le même fait peut se produire à l'égard des expressions algébriques quelconques : c'est ainsi qu'on dira de l'expression irrationnelle fractionnaire $\dfrac{x\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{a-b}$ qu'elle est entière et rationnelle par rapport aux lettres x et y, parce qu'elle devient telle si a et b représentent des nombres déterminés.

§ 2. — Addition, soustraction et multiplication des polynômes.

68. — L'addition et la soustraction des polynômes ont pour but de mettre la somme et la différence de deux polynômes sous la forme d'un polynôme : ceci se fera en appliquant les règles du calcul des nombres algébriques; c'est-à-dire que 1° pour former la somme des polynômes A et B, on écrira B à la suite de A en conservant à chaque terme son signe; 2° pour former la différence des polynômes A et B, on écrira B à la suite de A en changeant le signe de chacun de ses termes.

Ensuite, on fera la réduction des termes semblables dans le résultat obtenu, s'il y a lieu.

Exemple. — Soit :

$$P \equiv 5a^3 - 8a^2b + 5a^4b - b^3,$$
$$Q \equiv -4a^3 + 7a^2b + 6a^4b - 9b^3,$$
$$R \equiv a^3 - 6a^2b - 5a^4b + 4b^3;$$

mettre sous forme de polynôme l'expression $P + Q - R$.

On aura :

$$\begin{aligned} P + Q - R &\equiv 5a^3 - 8a^2b + 5a^4b - b^3 - 4a^3 + 7a^2b \\ &\quad + 6a^4b - 9b^3 - a^3 + 6a^2b + 5a^4b - 4b^3 \\ &\equiv 5a^2b + 16a^4b - 14b^3. \end{aligned}$$

Si, comme dans le cas présent, les polynômes renferment des termes semblables, il est commode de les écrire de façon que ces termes se trouvent les uns audessous des autres; la réduction des termes semblables se fait alors plus facilement. En outre, si les polynômes sont ordonnés, le résultat se trouve lui-même ordonné.

Pour faire l'opération précédente, on écrira donc, en

ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de a par exemple :

$$\begin{aligned} P+Q-R \equiv & 5a^4b+5a^3-8a^2b-b^3 \\ & +6a^4b-4a^3+7a^2b-9b^3 \\ & +5a^4b-a^3+6a^2b-4b^3 \\ \equiv & 16a^4b \qquad +5a^2b-14b^3. \end{aligned}$$

On simplifie encore l'écriture en adoptant la disposition suivante qui se comprend d'elle-même :

$$\begin{array}{rr|rr|rr|rr|l} P+Q-R\equiv & 5 & a^4b & +5 & a^3 & -8 & a^2b & -1 & b^3 \\ & +6 & & -4 & & +7 & & -9 & \\ & +5 & & -1 & & +6 & & -4 & \\ \equiv & 16\,a^4b & & & & +5\,a^2b & & -14\,b^3. & \end{array}$$

Ce que nous avons dit des polynômes s'applique évidemment aux monômes : un monôme est un polynôme à un seul terme.

69. — Comme toute opération, une opération algébrique doit être vérifiée. Voici une méthode générale de vérification qui s'applique à toutes les transformations algébriques.

Donnons aux lettres des valeurs numériques quelconques, et calculons les valeurs numériques que prennent les expressions sur lesquelles on opère, puis faisons sur les nombres ainsi obtenus les opérations indiquées ; on obtient un nouveau nombre qui doit être égal à la valeur numérique que prend le résultat de l'opération pour les mêmes valeurs attribuées aux lettres.

Cette *preuve* n'est pas absolue, comme toutes les preuves ; mais si elle réussit, et surtout si elle réussit pour plusieurs systèmes de valeurs numériques attribuées aux lettres, il y a grande chance que l'opération est exacte.

Exemple. — Pour vérifier l'opération du numéro précédent, faisons :

$$a=2, \qquad b=-1\,;$$

il vient :

$$P = 40 + 32 - 80 + 1 = -7,$$
$$Q = -32 - 28 - 96 + 9 = -147,$$
$$R = 8 + 24 + 80 - 4 = 108,$$

et par suite :

$$P + Q - R = -262.$$

Le résultat calculé $16a^4b + 5a^2b - 14b^3$ fournit le même nombre.

70. — La multiplication des polynômes a pour but de mettre le produit de deux polynômes sous la forme d'un polynôme. On arrive à ce résultat comme quand il s'agit de polynômes algébriques, en formant un nouveau polynôme avec tous les produits partiels que l'on peut obtenir en multipliant chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, chacun de ces produits étant affecté du signe + ou du signe —, suivant qu'il provient de deux termes affectés du même signe ou affectés de signes contraires. On fera ensuite la réduction des termes semblables s'il y a lieu.

On observera en outre, pour former les produits partiels, la règle suivante qui est évidente.

Le produit de deux monômes est un monôme qui a pour coefficient le produit des coefficients des deux monômes, et qui contient toutes les lettres entrant dans les deux monômes, chacune d'elles ayant pour exposant la somme de ses exposants dans les deux facteurs, ou son exposant dans l'un des facteurs si elle n'existe pas dans l'autre.

Exemple :

$$6a^4b^5c \times 7a^3bd^4 = 42a^7b^6cd^4,$$
$$(4a^3 - 3a^2b + 6c^3) \times 12a^3c^2 = 48a^6c^2 - 36a^5bc^2 + 72a^3c^5.$$
$$\left.\begin{array}{l}(5a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4)\\ \times (3a^3b - 4c^2)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}15a^7b - 18a^5b^3 + 9a^3b^5\\ - 20a^4c^2 + 24a^2b^2c^2 - 12b^4c^2.\end{array}\right.$$

71. — Pour faciliter la réduction des termes semblables, il est convenable de disposer l'opération de la

façon suivante. On écrit le multiplicateur sous le multiplicande et l'on tire un trait horizontal; on multiplie les termes successifs du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et l'on écrit les produits obtenus sur une ligne horizontale, au-dessous du trait; on multiplie les termes successifs du multiplicande par le second terme du multiplicateur, et l'on écrit les produits obtenus sur une seconde ligne horizontale, en plaçant les termes semblables les uns sous les autres, comme nous avons déjà fait à propos de l'addition et de la soustraction. On continue jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes du multiplicateur; on tire un nouveau trait horizontal, sous lequel on écrit le résultat, après réduction des termes semblables.

Soit par exemple à calculer le produit des polynômes

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$$

et $x+y+z$. On a l'opération ci-contre.

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$$
$$x+y+z$$

x^3	$+1 \vert xy^2$	$+1 \vert xz^2$	$-1 \vert xyz$	$-1 \vert x^2z$	$-1 \vert x^2y$				
	-1		-1		$+1$	$+y^3$	$+1 \vert yz^2$	$-1 \vert y^2z$	
		-1	-1	$+1$			-1	$+1$	$+z^3$
x^3			$-3\,xyz$			$+y^3$			$+z^3$.

Le produit est

$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Si les polynômes contiennent une seule lettre, ou bien contiennent deux lettres, mais sont homogènes, il est convenable de les ordonner par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de cette lettre ou bien de l'une de ces lettres, suivant le cas; les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur se trouveront eux-mêmes ordonnés, et l'on aura les dispositions simples que mettent en évidence les exemples ci-dessous :

$$
\begin{array}{llllllll}
3x^4 & -\ 5x^3 & +\ 3x^2 & -\ 4x & +\ 1 & & & \\
 & 2x^3 & -\ 5x^2 & +\ x & -\ 4 & & & \\
\hline
6x^7 & -10 \mid x^6 & +\ 6 \mid x^5 & -\ 8 \mid x^4 & +\ 2 \mid x^3 & & & \\
 & -15 & +25 & -15 & +20 & -\ 5 \mid x^2 & & \\
 & & +\ 3 & -\ 5 & +\ 3 & -\ 4 & +\ 1 \mid x & \\
 & & & -12 & +20 & -12 & +16 & -4 \\
\hline
6x^7 & -25\,x^6 & +34\,x^5 & -40\,x^4 & +45\,x^3 & -21\,x^2 & +17\,x & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
a^4 & -\ 4a^3b & +\ 6a^2b^2 & -\ 4ab^3 & +\ b^4 & & & \\
 & a^3 & -\ 3a^2b & +\ 3ab^2 & -\ b^3 & & & \\
\hline
a^7 & -\ 4 \mid a^6b & +\ 6 \mid a^5b^2 & -\ 4 \mid a^4b^3 & +\ 1 \mid a^3b^4 & & & \\
 & -\ 3 & +12 & -18 & +12 & -\ 3 \mid a^2b^5 & & \\
 & & +\ 3 & -12 & +18 & -12 & +\ 3 \mid ab^6 & \\
 & & & -\ 1 & +\ 4 & -\ 6 & +\ 4 & -\ b^7 \\
\hline
a^7 & -7\,a^6b & +21\,a^5b^2 & -35\,a^4b^3 & +35\,a^3b^4 & -21\,a^2b^5 & +7\,ab^6 & -\ b^7.
\end{array}
$$

On remarquera que par rapport à la lettre ordonnatrice, les degrés des polynômes ordonnés que l'on obtient comme produits partiels en multipliant le multiplicande par les termes successifs du multiplicateur vont en diminuant ou en augmentant chaque fois d'une unité, suivant que les polynômes donnés sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes de cette lettre; les termes semblables se placent donc d'eux-mêmes les uns sous les autres, en reculant chaque fois d'un rang le premier terme de chaque produit partiel.

Il faudra toutefois prendre quelques précautions dans

l'application de cette règle purement pratique, si les polynômes à multiplier ne sont pas *complets*, c'est-à-dire si la différence entre les exposants de la lettre ordonnatrice dans deux termes consécutifs n'est pas toujours égale à l'unité : c'est ce que montre bien l'exemple suivant dans lequel on multiplie l'un par l'autre les polynômes $3x^2 + 4x^4 - 5x^5 + x^7$ et $x^3 + 2x^4 - 3x^6$:

$$
\begin{array}{llllllll}
3x^2 & & +4x^4 & -5\,x^5 & & +x^7 & & \\
 & x^3 & +2x^4 & & -3x^6 & & & \\
\hline
3x^5 & & +4x^7 & -5 \,|\, x^8 & & +\ 1 \,|\, x^{10} & & \\
 & +6x^6 & & +8 & -10x^9 & & +\ 2 \,|\, x^{11} & \\
 & & & -9 & & -12 & +15 & -3x^{13} \\
\hline
\end{array}
$$

$$3x^5 + 6x^6 + 4x^7 - 6x^8 - 10x^9 - 11x^{10} + 17x^{11} - 3x^{13}.$$

Pour vérifier cette dernière opération, remarquons que si l'on fait $x = 1$, le multiplicateur est nul; il doit en être de même du produit, ce qui a lieu en effet.

72. — Il est évident que le degré du produit de deux monômes est égal à la somme des degrés de ces monômes.

Ceci posé, considérons le produit de deux polynômes A et B, qui dépendent d'une seule lettre; si a et b sont dans ces polynômes les termes du plus haut degré, il est clair que le produit partiel ab qui figure dans le polynôme produit ne se réduira avec aucun autre, car son degré sera le plus grand possible; de même si a' et b' sont dans A et B les termes de moindre degré, il est clair que le produit partiel $a'b'$ ne se réduira avec aucun autre, car son degré sera le plus petit possible. On peut donc énoncer l'importante proposition suivante :

Si l'on multiplie l'un par l'autre deux polynômes ordonnés tous les deux par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, les termes extrêmes du produit supposé lui-même ordonné par rapport à cette lettre sont les produits des deux premiers termes et des deux derniers termes dans les deux facteurs.

On peut dire encore que *le degré du produit de deux*

polynômes qui dépendent d'une seule lettre est égal à la somme des degrés de ces polynômes.

Ces théorèmes sont faciles à vérifier sur l'exemple qui termine le numéro précédent.

Ces mêmes propositions s'étendent sans difficulté aux produits de deux polynômes qui dépendent de plusieurs lettres, x, y, z par exemple. Ordonnons d'abord chacun de ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes de x; puis le coefficient de la plus haute puissance de x par rapport aux puissances décroissantes de y; puis enfin, dans ce coefficient, le coefficient de la plus haute puissance de y par rapport aux puissances décroissantes de z : le produit des premiers termes des deux polynômes ainsi disposés donnera un produit partiel qui ne se réduira avec aucun autre terme, et qui sera au même sens le premier terme du produit des deux polynômes. On raisonnerait de même en ordonnant par rapport aux puissances croissantes des lettres.

On verra de la même façon que le degré du produit de deux polynômes quelconques est égal à la somme des degrés de ces polynômes.

Enfin, nous laisserons au lecteur le soin d'étendre encore ces propositions au cas du produit de plusieurs polynômes.

En particulier, nous énoncerons les conséquences suivantes :

Le produit de plusieurs polynômes est un polynôme qui a au moins deux termes.

Le produit de plusieurs polynômes homogènes est un polynôme homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des facteurs.

Pour que le produit de plusieurs polynômes soit nul identiquement, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul identiquement.

73. — Pour compléter les propositions du n° **39**, cherchons à former le carré et le cube de la somme d'un nombre quelconque de termes.

1° Soit à former le carré de la somme $a+b+c+\ldots+h+k$. Pour faire le produit de deux polynômes algébriques, on multiplie de toutes les façons possibles un terme de l'un par un terme de l'autre, et on ajoute les produits partiels ainsi obtenus. Ici nous devons multiplier $a+b+c+\ldots+h+k$ par lui-même. Si nous prenons le terme a dans chacun des facteurs, nous obtenons le produit partiel a^2; si nous prenons le terme a dans le premier facteur et le terme b dans le second, nous obtenons ab; si de même nous prenons b dans le premier facteur et a dans le second, nous obtenons encore ab. En répétant le même raisonnement, nous voyons que *le carré d'une somme est égal à la somme des carrés des différents termes, plus deux fois la somme des produits que l'on obtient en multipliant chaque terme par un autre.*

En d'autres termes :

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^2 = a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2+k^2 \\ +2(ab+ac+\ldots+ak+bc+\ldots+hk).$$

Exemple :

$$(a-b+c-d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad \\ -2bc+2bd-2cd.$$

2° Soit à former le cube de la somme $a+b+c+\ldots+h+k$. Pour faire le produit de plusieurs polynômes algébriques, on fait la somme des produits partiels obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chaque polynôme.

Ici nous devons multiplier ensemble trois polynômes égaux à $a+b+c+\ldots+h+k$. Si nous prenons le terme a dans chacun des facteurs, nous obtenons le produit partiel a^3 ; si nous prenons a dans deux des facteurs, et b dans celui qui reste, nous obtenons de trois façons différentes le produit partiel a^2b; si enfin nous prenons a dans l'un des facteurs, b dans un autre et c dans celui qui reste, nous obtenons de six façons différentes, comme on le voit tout de suite, le produit partiel abc. En répétant le même raisonnement, nous pouvons dire que : *le cube d'une somme est égal à la somme des cubes des différents termes, plus trois fois la somme des produits que l'on obtient en multipliant le carré de chaque terme par un autre, plus six fois la somme des produits que l'on obtient en multipliant ensemble trois termes différents.*

En d'autres termes, on a :

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^3 = a^3+b^3+c^3+\ldots+h^3+k^3 \\ +3(a^2b+a^2c+\ldots+a^2k+b^2a+b^2c+\ldots+k^2h) \\ +6(abc+\ldots+ahk+\ldots).$$

Exemple :

$$\begin{aligned}(a-b+c-d)^3 \equiv a^3 &- b^3 + c^3 - d^3 \\ &- 3a^2b + 3a^2c - 3a^2d + 3ab^2 + 3b^2c - 3b^2d \\ &+ 3ac^2 - 3bc^2 - 3c^2d + 3ad^2 - 3bd^2 + 3cd^2 \\ &- 6abc + 6abd - 6acd + 6bcd.\end{aligned}$$

On raisonnerait de même s'il fallait élever une somme à une puissance d'exposant supérieur à 3.

Enfin, nous signalerons encore les multiplications intéressantes suivantes :

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$\equiv -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2,$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \equiv a^3+b^3+c^3-3abc.$$

La première est facile à vérifier; la seconde a été donnée ci-dessus comme exemple.

74. — Appliquons ce qui précède à un polynôme A ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre, et soient a et b les deux premiers termes de ce polynôme.

Le premier terme du carré de A sera a^2 **(72)** : son second terme sera évidemment $2ab$, car tout autre est de degré inférieur à celui-là. De même, le premier terme du cube de A sera a^3, et son second terme sera évidemment $3a^2b$.

Plus généralement, on verra de même que le premier terme de la puissance m^{me} de A sera a^m, et son second terme $ma^{m-1}b$; on l'obtient en prenant dans le produit de m facteurs égaux à A représenté par A^m, le terme a dans $m-1$ facteurs et b dans celui qui reste, ce qui peut se faire de m façons différentes.

On obtiendrait des résultats tout pareils en ordonnant le polynôme A par rapport aux puissances croissantes d'une lettre.

Exemple :

$$\begin{aligned}(5x^3-2x^2+3x-1)^2 &\equiv 25x^6-20x^5+34x^4-22x^3 \\ &\quad +13x^2-6x+1,\\ (x^2-2x+1)^4 &\equiv x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3 \\ &\quad +28x^2-8x+1.\end{aligned}$$

Chaque fois, les deux premiers termes et les deux derniers peuvent être écrits *a priori*.

Remarque. — Il résulte des règles exposées dans ce paragraphe que toute expression algébrique entière et rationnelle peut se mettre sous la forme d'un polynôme.

§ 3. — Division des polynômes.

75. — La division des polynômes sert à reconnaître si le rapport de deux polynômes peut se mettre lui-même sous la forme d'un polynôme, et à déterminer ce dernier polynôme quand il existe.

D'abord il est clair que le rapport de deux monômes peut se mettre lui-même sous la forme d'un monôme si toutes les lettres qui figurent au diviseur figurent aussi au dividende avec des exposants au moins égaux, et dans ce cas seulement. On dit alors que le monôme dividende est divisible par le monôme diviseur, et le quotient est un monôme qui a pour coefficient le rapport des coefficients des deux monômes donnés, et qui contient les diverses lettres qui figurent au dividende, chacune d'elles affectée d'un exposant égal à la différence des exposants qui l'affectent au dividende et au diviseur; si cette différence est nulle, la lettre ne figure pas au quotient; si une lettre ne figure pas au diviseur, elle figure au quotient avec le même exposant qu'au dividende.

Exemple :

$$\frac{-25\,a^3b^2c^4d^5}{10\,a^2b^2d^3} \equiv -\frac{5}{2}ac^4d^2.$$

Le degré du quotient est égal à la différence des degrés du dividende et du diviseur.

Remarquons que, dans l'identité précédente, les lettres ne peuvent pas recevoir de valeurs numériques annulant le diviseur; cependant l'identité nouvelle que l'on obtient en écrivant que le produit du diviseur par le quotient est identique au dividende, a lieu, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. Ceci résulte de la façon même dont on a trouvé le quotient.

La même observation devra être faite dans tout ce qui suit.

Le rapport d'un polynôme et d'un monôme ne peut se mettre sous la forme d'un polynôme que si chacun des

termes du dividende est divisible par le monôme diviseur. Car si $A + B + C + \dots$ est le dividende, A, B, C, ... étant ses différents termes; si M est le diviseur et si $P + Q + R + \dots$ est le quotient, P, Q, R, ... étant ses différents termes, on doit avoir :

$$\begin{aligned} A + B + C + \dots &\equiv M(P + Q + R + \dots) \\ &\equiv MP + MQ + MR + \dots \end{aligned}$$

Les termes MP, MQ, MR, ... sont tous distincts en même temps que P, Q, R, ... et par suite doivent être respectivement identiques aux différents termes A, B, C, ... du dividende; ceux-ci sont donc tous divisibles par M.

S'il en est ainsi, le polynôme $A + B + C + \dots$ est dit divisible par M, et le quotient s'obtient en divisant par M chacun des termes du polynôme.

Exemple :

$$\frac{36a^4b^2c^3 - 54a^3b^4c^2 + 72a^2b^5c}{18a^2b^2c} \equiv 2a^2c^2 - 3ab^2c + 4b^3.$$

76. — Soient A et B deux polynômes dépendant d'une seule lettre x; cherchons s'il existe un polynôme Q tel que l'on ait :

$$\frac{A}{B} \equiv Q \quad \text{ou} \quad A \equiv BQ.$$

Supposons les deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, et soient m et p leurs degrés, de sorte que leurs premiers termes sont respectivement ax^m et bx^p, a et b étant des nombres. Il est clair d'abord que la question n'a de sens que si m est au moins égal à p, et que le polynôme Q sera de degré $m - p$, s'il existe. D'ailleurs, si Q existe, et si nous le supposons aussi ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, son premier terme multiplié par bx^p, premier terme de B, devra reproduire ax^m, premier terme de A (**72**); on l'obtiendra donc en divisant ax^m par bx^p, ce qui donne $\frac{a}{b}x^{m-p}$ $\left(\text{ou } \frac{a}{b}, \text{ si } m \text{ et } p \text{ sont égaux}\right)$.

Ceci posé, multiplions B par le terme que nous venons de trouver, et retranchons ce produit de A ; le produit de B par $\frac{a}{b}x^{m-p}$ sera un polynôme de degré m, dont le premier terme sera précisément ax^m; la différence $A - B \times \frac{a}{b}x^{m-p}$ sera donc un polynôme A′ de degré inférieur à m. D'autre part, Q étant supposé exister, A est identique à BQ, et la différence précédente s'écrit sous la forme $BQ - B \times \frac{a}{b}x^{m-p}$ ou $B\left(Q - \frac{a}{b}x^{m-p}\right)$: cette différence A′ est donc le produit de B par la partie du quotient qui reste à trouver. On est ainsi ramené à la question même à traiter, mais avec cette différence capitale que le degré de A′ est inférieur à celui de A.

Si A′ est nul identiquement, l'opération est finie : A est divisible par B ; le quotient Q est égal à $\frac{a}{b}x^{m-p}$.

Si A′ n'est pas nul, mais est de degré inférieur à celui de B, l'opération est encore terminée ; la division ne se fait pas exactement, car A′ ne peut pas être le produit de B par un autre polynôme.

Si A′ n'est pas nul et est de degré au moins égal à celui de B, on continue l'opération de la même façon ; le second terme du quotient, c'est-à-dire le premier terme du quotient $\frac{A'}{B}$, que l'on suppose exister, est obtenu en divisant le premier terme de A′ par le premier terme de B ; on multiplie ensuite B par le terme ainsi obtenu, et on retranche le produit de A′. On obtient une différence A″ sur laquelle on peut répéter ce qui précède.

Finalement, puisque les degrés des polynômes A, A′, A″... vont toujours en diminuant, ou bien on obtient une différence analogue à A′, A″,... nulle identiquement ; alors A est divisible par B, ce qu'on exprime encore en disant que la division se fait exactement, et le quotient Q est connu par ses termes successifs ; ou bien on arrive à une diffé-

rence R, analogue à A′, A″,... non nulle, et de degré inférieur à celui de B ; alors la division ne se fait pas exactement; il n'y a pas de polynôme qui, multiplié par B, reproduise A.

77. — Les exemples suivants feront suffisamment comprendre comment on dispose une division de polynômes :

1° Soit à diviser $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ par $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$\begin{array}{l|l}
\text{A)}\quad x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{(B} \\
\qquad x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 & \hline \\
\hline
\text{A}')\quad -2x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 5x - 1 & x^2 - 2x + 1 \qquad \text{(Q} \\
\qquad -2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 2x & \\
\hline
\text{A}'')\quad x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \\
\qquad x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

La division se fait exactement ; le quotient est $x^2 - 2x + 1$.

2° Soit à diviser $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ par $x^2 + 6x - 4$.

$$\begin{array}{l|l}
\text{A}')\quad x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 5x - 1 & x^2 + 6x - 4 \qquad \text{(B} \\
\qquad x^5 + 6x^4 - 4x^3 & \hline \\
\hline
\text{A}')\quad -9x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 5x - 1 & x^3 - 9x^2 + 64x - 427 \quad \text{(Q} \\
\qquad -9x^4 - 54x^3 + 36x^2 & \\
\hline
\text{A}'')\quad 64x^3 - 43x^2 + 5x - 1 & \\
\qquad 64x^3 + 384x^2 - 256x & \\
\hline
\text{A}''')\quad -427x^2 + 261x - 1 & \\
\qquad -427x^2 - 2562x + 1708 & \\
\hline
\text{R)}\quad 2823x - 1709 &
\end{array}$$

La division est impossible.

On peut simplifier les dispositions précédentes de la façon suivante : 1° après avoir écrit le premier terme du quotient, on barre le premier terme du dividende qui doit disparaître dans la différence A′ ; 2° on multiplie le premier

terme du quotient par les différents termes du diviseur à partir du second seulement, et l'on écrit les produits, *changés de signe*, sous les termes correspondants du dividende, de sorte que pour former A′ on est ramené à faire une addition ; 3° on écrit seulement le premier terme de A′, ce qui permet de calculer le second terme du quotient ; alors on barre le premier terme de A′, et l'on opère comme précédemment ; et ainsi de suite.

Les exemples précédents prennent alors la disposition ci-contre.

x^5	$-5x^4$	$+10x^3$	$-10x^2$	$+5x$	-1	x^3-3x^2+3x-1
	$+3$	-3	$+1$			x^2-2x+1
	$-2x^4$	-6	$+6$	-2		
		$+x^3$	$+3$	-3	$+1$	
			0	0	0	

x^5	$-3x^4$	$+6x^3$	$-7x^2$	$+5x$	-1	x^2+6x-4
	-6	$+4$				$x^3-9x^2+64x-427$
	$-9x^4$	$+54$	-36			
		$+64x^3$	-384	$+256$		
			$-427x^2$	$+2562$	-1708	
				$+2823x$	-1709	

Comme on le voit, on évite ainsi d'écrire des termes inutiles : on remplace en effet le résultat de plusieurs soustractions successives par celui d'une seule addition équivalente, et cela au moment seulement où l'on a besoin de connaître ce résultat.

Remarque. — Si la division de A par B se fait exactement, le dernier terme du quotient peut être obtenu directement en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur (**72**). Appelons s le monôme ainsi obtenu ; si l'on est amené à écrire au quotient un terme de degré inférieur à s, ou encore un terme de même degré que s, mais de coefficient différent, on peut donc affirmer, sans aller plus loin, que la division proposée est impossible.

Exemple. — En divisant $x^6 + 4x^5$ par $x^3 + 2x^2$, le

premier terme du quotient est x^3; d'ailleurs s calculé directement est $2x^3$: la division est impossible.

Si les coefficients des polynômes donnés sont entiers, et si le coefficient du premier terme du diviseur est égal à 1 en valeur absolue, la marche même de l'opération montre qu'il ne s'introduira nulle part de nombres fractionnaires. Si donc le dernier terme s du quotient calculé directement a un coefficient fractionnaire, la division est certainement impossible.

C'est ainsi que l'on pouvait reconnaître *a priori* que la division qui nous a servi plus haut de second exemple est impossible, puisque, dans ce cas, on a $s = \frac{1}{4}$.

78. — Quand la division de A par B est impossible, on le reconnaît à l'existence du *reste* R, de degré inférieur à celui du diviseur B. D'ailleurs, si l'on appelle Q le polynôme que l'on a écrit au quotient, tant qu'on supposait son existence, il est clair que A′ étant la différence entre A et le produit de B par le premier terme de Q, A″ étant la différence entre A′ et le produit de B par le second terme de Q, et ainsi de suite, R est finalement la différence entre A et le produit de B par Q. On a donc l'identité :

$$A \equiv BQ + R.$$

Ainsi, si A n'est pas divisible par B, on peut trouver deux polynômes Q et R, ce dernier de degré inférieur à celui de B, tels que A soit identique au produit BQ augmenté de R. Ces polynômes reçoivent le nom de *quotient* et de *reste* de la division de A par B.

Dans une division exacte, le reste est nul.

Nous admettrons que l'on ne peut mettre A sous la forme $BQ + R$, R étant de degré inférieur à celui de B, que d'une seule façon: par suite, pour que la division de A par B se fasse exactement, il faut et il suffit que R soit nul identiquement.

Remarquons que l'identité $A \equiv BQ + R$ permet encore d'écrire le rapport $\frac{A}{B}$ sous la forme $Q + \frac{R}{B}$.

79. — Soit A un polynôme qui dépend de la seule lettre x; divisons-le par le binôme $x - a$, a étant un nombre. Si l'on continue l'opération jusqu'à la fin, on trouve un quotient Q et et un reste R tels que l'on ait l'identité :

$$A \equiv Q(x-a)+R;$$

d'ailleurs R, étant de degré inférieur à celui du diviseur, qui est du premier degré, est de degré zéro, c'est-à-dire ne contient pas x; c'est un nombre.

Le polynôme A est identique à l'expression $Q(x-a)+R$, quelle que soit la valeur numérique donnée à x. Donnons à x la valeur a : A prend une certaine valeur numérique A_a; le polynôme Q prend aussi une certaine valeur numérique Q_a, et comme $x-a$ prend la valeur zéro, le produit $Q(x-a)$ prend la valeur zéro; enfin R ne change pas. On a donc l'égalité numérique :

$$A_a = R,$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Le reste de la division d'un polynôme A *par le binôme* x — a *est un nombre égal à la valeur numérique que prend* A *lorsqu'on y remplace* x *par* a.

Exemple. — Divisons $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ par $x+2$; ici $a = -2$, puisque $x+2 \equiv x - (-2)$, et par suite

$$R = -8 - 20 - 14 - 3 = -45,$$

ce qu'il est facile de vérifier par une opération directe.

Comme corollaire, nous obtenons l'importante proposition suivante :

Pour que le polynôme A *soit divisible par* x — a, *il faut et il suffit qu'il s'annule lorsqu'on y remplace* x *par* a.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit divisible par un autre, est que le reste de la division soit nul. Donc, ici il faut et il suffit que la valeur numérique de A pour $x = a$ soit nulle, puisqu'elle est égale au reste.

Exemples. — Le polynôme $x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 171$ est divisible par $x - 3$, car, pour $x = 3$, il s'annule. Le quotient est $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 20x + 57$.

$x^m - a^m$ est divisible par $x - a$, quel que soit m.

$x^m + a^m$ n'est jamais divisible par $x - a$: le reste de la division est $2a^m$.

$x^m - a^m$ est divisible par $x + a$, si m est pair; sinon le reste est $-2a^m$.

$x^m + a^m$ est divisible par $x + a$, si m est impair; sinon le reste est $2a^m$.

Toutes ces propositions, que nous connaissions déjà sous une autre forme (**39**), résultent immédiatement de ce qui a été dit plus haut; on remarquera seulement que $x + a$ est considéré comme égal à $x - (-a)$, dans l'application du théorème.

Nous laisserons au lecteur le soin de trouver une loi simple pour calculer le quotient de la division d'un polynôme par $x - a$, sans faire effectivement la division.

80. — *Si un polynôme* A, *qui ne dépend que de* x, *est divisible séparément par les binômes* x — a, x — b, x — c, a, b, c *étant des nombres différents, il est divisible aussi par le produit* (x — a) (x — b) (x — c).

En effet, on a d'abord par hypothèse, Q étant un certain polynôme :

$$A \equiv (x - a) Q.$$

Dans cette identité, donnons à x la valeur b; le premier membre s'annule, puisque A est divisible par $x - b$; le second devient $(b - a) Q_b$ en appelant Q_b la valeur de Q pour $x = b$; comme le produit $(b - a) Q_b$ doit être nul et que $b - a$ n'est pas nul par hypothèse, Q_b est nul, c'est-à-dire que Q est divisible par $x - b$. Par suite on peut écrire :

$$Q \equiv (x - b) Q',$$

Q' étant un nouveau polynôme.

On démontrerait de même que Q est divisible par $x - c$; alors en faisant dans l'identité précédente $x = c$, on obtient par un raisonnement pareil au précédent $Q'_c = 0$. Donc Q' est divisible par $x - c$, et l'on a :

$$Q' \equiv (x - c) Q'',$$

Q'' étant un nouveau polynôme.

On en déduit d'abord :

$$Q \equiv (x - b) (x - c) Q'',$$

puis,

$$A \equiv (x - a) (x - b) (x - c) Q'',$$

ce qui montre bien que A est divisible par le produit $(x - a)$ $(x - b) (x - c)$.

Ce théorème s'étend à un nombre quelconque de binômes tels que $x - a$.

Exemple. — $x^m - a^m$ est divisible par $(x - a) (x + a)$ ou $x^2 - a^2$ quand m est pair, car il est séparément divisible par $x - a$ et $x + a$.

81. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les polynômes donnés A et B, l'un comme dividende, l'autre comme diviseur, dépendaient d'une seule lettre x. Supposons maintenant qu'ils dépendent de deux lettres x et y. Alors pour chercher s'il existe un polynôme Q qui, multiplié par B, reproduise A, on ordonnera tous ces polynômes par rapport à l'une des lettres, x par exemple, et supposant que y ait pour un instant une valeur déterminée, on raisonnera comme au n° **76**.

On sera ainsi amené à diviser les premiers termes de A, A′, A″ ... par le premier terme de B : mais tous ces termes sont en général des polynômes en y; on aura donc à faire des divisions partielles de polynômes à une seule lettre. Si l'une de ces divisions ne peut se faire, la division de A par B est elle-même impossible, et l'on n'a rien de plus à dire. Si toutes ces divisions partielles se font exactement, on est amené à un reste R dont le degré en x est inférieur au degré de B : la division de A par B se fait exactement si ce reste R est nul ; sinon on a l'identité $A \equiv BQ + R$.

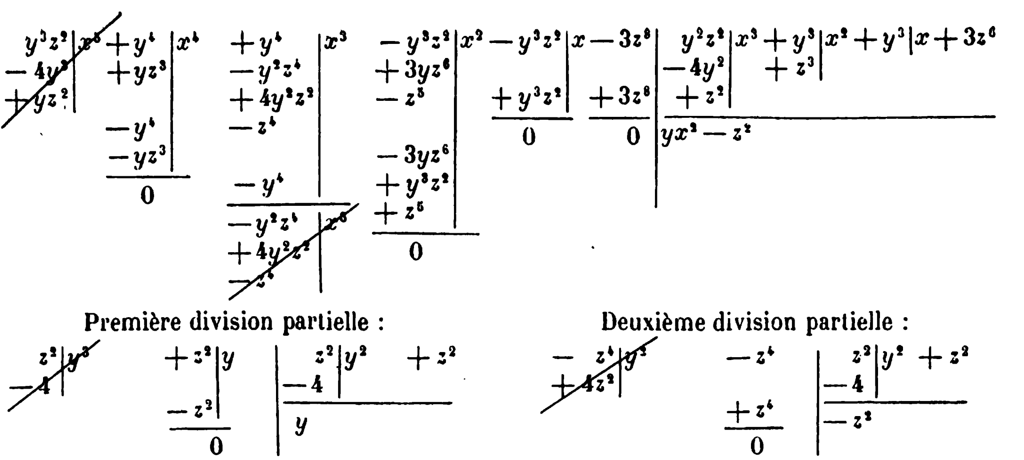
Si les polynômes donnés dépendent de plus de deux lettres, on procédera de la même façon en ordonnant par rapport aux lettres successives.

Exemple. — Soit à diviser le polynôme :

$$x^5y^3z^2 + 3x^2yz^6 - x^3y^2z^4 - 3z^8 - 4x^5y^3 + x^5yz^2 + x^4y^4 + x^4yz^3 + x^3y^4 + 4x^3y^2z^2 - x^3z^4 - x^2y^3z^2 - x^2z^5 - xy^3z^2$$

par $x^3y^2z^2 + 3z^6 - 4x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + xy^3$.

En ordonnant par rapport à x, puis y, puis z, on a l'opération suivante :



Première division partielle :

Deuxième division partielle :

Division complémentaire relative à la deuxième division partielle :

$$\begin{array}{r|l} -z^4 + 4z^2 & z^2 - 4 \\ \cline{2-2} -4z^2 & -z^2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

La division se fait exactement : le quotient est $x^2y - z^2$.

82. — *Si un polynôme* A, *dépendant de plusieurs lettres* x, y, z, *devient nul identiquement lorsqu'on y remplace la lettre* y *par la lettre* x, *il est divisible par* x — y; *et réciproquement.*

On fera la démonstration comme au n° **79**; il suffit de remarquer qu'en faisant la division de A par $x - y$, on ne rencontre jamais de division partielle impossible, et que par suite on peut écrire l'identité

$$A \equiv (x - y) Q + R,$$

R étant un nouveau polynôme indépendant de x.

On démontrera encore, comme au n° **80**, que si le polynôme A est divisible séparément par des facteurs différents tels que $x - y$, $x - z$, $y - z$,... il est divisible aussi par le produit de ces facteurs.

Exemple. — Soit le polynôme $y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 + x^2y - xy^2$; il devient identiquement nul si l'on fait $x \equiv y$, ou bien $x \equiv z$, ou bien $y \equiv z$; il est donc divisible par le produit $(y - z)(z - x)(x - y)$. Il est facile de trouver le quotient: le polynôme donné et le produit $(y - z)(z - x)(x - y)$ sont homogènes et du troisième degré; le quotient ne peut donc être qu'un nombre : ce nombre s'obtiendra en divisant le premier terme du polynôme donné supposé ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, puis de y, savoir x^2y, par le premier terme du produit $(y - z)(z - x)(x - y)$ supposé ordonné de la même façon, c'est-à-dire par $-x^2y$. Le quotient est -1, et par suite on a l'identité

$$y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 + x^2y - xy^2 \equiv -(y - z)(z - x)(x - y).$$

§ 4. — Transformation des fractions algébriques dont les deux termes sont des polynômes.

83. — On peut simplifier une fraction algébrique dont les deux termes sont des polynômes en divisant ces deux termes par un même polynôme qui les divise tous les deux.

Une fraction dont les deux termes sont des monômes se simplifie sans difficulté : les facteurs communs aux deux termes sont en évidence.

Exemple :

$$\frac{-36a^3b^4c^2d^6}{18a^2b^5c^4d^2} \equiv -\frac{2ad^4}{bc^2}.$$

Une fraction dont l'un des termes est un polynôme et

l'autre un monôme se simplifie de la même façon; si le monôme est en dénominateur, on peut aussi mettre la fraction sous la forme d'une somme de monômes et de rapports de monômes.

Exemple :

$$\frac{6a^5b^3 - 4a^2b^2 + 7a^3b}{a^3b^2} \equiv \frac{6a^2b^2 - 4b + 7a}{ab}$$

$$\equiv 6a^2b - \frac{4}{a} + \frac{7}{b}.$$

Si la fraction donnée est de la forme $\frac{A}{B}$, A et B étant des polynômes, on la simplifiera souvent en cherchant des facteurs communs aux deux termes faciles à mettre en évidence : l'habitude facilitera l'application de cette méthode.

Exemple. — Soit à simplifier l'expression

$$S \equiv \frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)}.$$

En réduisant ces fractions au même dénominateur, le plus simple possible, il vient :

$$S \equiv \frac{\begin{cases} -a(b-c)(b-d)(c-d) \\ -b(c-a)(c-d)(a-d) \\ -c(a-b)(a-d)(b-d) \end{cases}}{(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

Le numérateur s'annule identiquement pour $b \equiv c$, car le premier terme s'annule et les deux derniers deviennent identiques avec des signes contraires. Donc, le numérateur de S est divisible par $b - c$; comme les lettres a, b, c peuvent se remplacer les unes les autres sans que l'expression change, il est clair que, par raison de *symétrie*, le numérateur de S est aussi divisible par $c - a$ et $a - b$, et par suite par le produit $(b - c)(c - a)(a - b)$. Comme

plus haut, on voit que le quotient est égal à d. On a donc :

$$S \equiv \frac{d}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

84. — Supposons que l'application de la méthode précédente n'ait rien donné; alors on pourra appliquer la méthode générale suivante qui permettra toujours de réduire la fraction donnée le plus possible.

Imaginons que les deux termes A et B de la fraction soient des polynômes ne dépendant que d'une seule lettre x. Il s'agit de chercher s'il existe un polynôme D qui divise à la fois A et B, et s'il existe plusieurs tels polynômes, de trouver celui qui a le plus haut degré. A cet effet, supposons que A soit de degré au moins égal à celui de B, et faisons la division de A par B; on obtient une identité de la forme

$$A \equiv BQ + R,$$

R étant de degré inférieur à celui de B. Cette identité montre que les polynômes qui divisent à la fois A et B sont les mêmes que ceux qui divisent à la fois B et R.

On est par suite amené à faire une théorie en tout semblable à celle du plus grand commun diviseur en arithmétique. On divise B par R, puis R par le reste de cette nouvelle division, et ainsi de suite. On arrive finalement à une division qui se fait exactement, ou bien à une division qui donne pour reste un nombre non nul. Dans ce dernier cas, il n'y a aucun polynôme divisant à la fois A et B; dans le premier, si D est le diviseur de la division qui se fait exactement, les polynômes qui divisent à la fois A et B sont ceux qui divisent D; par suite, en divisant A et B par le polynôme D, appelé aussi plus grand commun diviseur de A et B, on obtient une fraction identique à $\frac{A}{B}$ et qui n'est plus susceptible d'être réduite.

Nous ne développerons pas davantage cette théorie du plus grand commun diviseur qui a, comme en arithmétique, de nombreuses conséquences; nous laisserons aussi au lecteur le soin de l'étendre au cas où les polynômes A et B dépendent de plusieurs lettres.

Exemples. — 1° Simplifier la fraction

$$\frac{x^4+7x^3+3x^2+2x-4}{x^5-x^4+4x^3+2x^2+4x-1}.$$

La simplification, si elle est possible, est loin d'être évidente. En divisant le dénominateur par le numérateur, on trouve pour reste $57x^3+24x^2+24x-33$; divisant le numérateur par ce

reste, on trouve un nouveau reste égal à $-\frac{69}{361}(x^2+x+1)$; divisant le premier reste par le second, ou plus simplement par x^2+x+1, puisque les facteurs numériques ne jouent aucun rôle, la division se fait exactement; le polynôme x^2+x+1 divise donc les deux termes de la fraction donnée qui s'écrit sous la forme plus simple $\frac{x^2+6x-4}{x^3-2x^2+5x-1}$, et qui ne peut plus être simplifiée.

2° Simplifier l'expression

$$\frac{X+Y+Z}{X'+Y'+Z'},$$

où l'on a :

$$X \equiv (y-z)(1+y^2)(1+z^2), \qquad X' \equiv x(y-z)(1+y^2)(1+z^2),$$
$$Y \equiv (z-x)(1+z^2)(1+x^2), \qquad Y' \equiv y(z-x)(1+z^2)(1+x^2),$$
$$Z \equiv (x-y)(1+x^2)(1+y^2), \qquad Z' \equiv z(x-y)(1+x^2)(1+y^2).$$

En considérant les lettres y et z comme des nombres, on trouve d'abord comme plus grand commun diviseur des deux termes $x^2-x(y+z)+yz$, et la fraction devient :

$$\frac{x(y^2-z^2)+y^2z-yz^2-y+z}{x(y^2z-yz^2-y+z)-y^2+z^2}.$$

Les deux coefficients de x et les deux termes indépendants de x ont pour plus grand commun diviseur $y-z$, et par suite la fraction devient finalement :

$$\frac{x(y+z)+yz-1}{x(yz-1)-y-z}, \text{ ou bien } \frac{yz+zx+xy-1}{xyz-x-y-z}.$$

On serait arrivé plus facilement à ce résultat en remarquant que les deux termes de la fraction donnée s'annulent dès que deux des lettres x, y, z sont supposées identiques, et raisonnant comme au numéro précédent.

§ 5. — Racines des polynômes.

85. — La racine m^{me} d'un monôme se simplifie sans difficulté en appliquant les règles du calcul des radicaux.

Exemple :

$$\sqrt[3]{25a^4b^6c^8} \equiv ab^2c^2\sqrt[3]{25ac^2};$$

$$\sqrt{6a^3b^4c^5} \equiv \pm ab^2c^2\sqrt{6ac},$$

suivant que a est positif ou négatif.

On simplifie de même la racine m^{me} d'un polynôme A si l'on réussit à mettre ce polynôme sous forme d'un produit de facteurs.

Exemple :

$$\sqrt{x^4+3ax^3+3a^2x^2+a^3x} \equiv \pm (x+a)\sqrt{x(x+a)},$$

suivant que $(x+a)$ est positif ou négatif, parce que le polynôme sous le radical est identique à $x\,(x+a)^3$.

86. — Etant donné un polynôme A, on peut chercher s'il existe un polynôme B tel que l'on ait :

$$A \equiv B^m;$$

B est alors une racine m^{me} de A.

Supposons que A dépende d'une seule lettre x, et ordonnons-le par rapport aux puissances décroissantes de x ; soit a son premier terme; de même en supposant l'existence de B, ordonnons-le de la même façon, et soit b son premier terme : d'après ce qui a été dit au n° **74**, b^m doit reproduire a; donc, en premier lieu, la question n'a de sens que s'il existe un monôme dont la m^{me} puissance soit a, c'est-à-dire si l'exposant de x dans a est multiple de m, et si, en outre, le coefficient de a est positif, quand m est pair.

Ces conditions étant supposées vérifiées, soit a_0x^{mp} l'expression de a, a_0 étant un nombre; alors b est nécessairement $\sqrt[m]{a_0}\,x^p$ si m est impair, et $\pm\sqrt[m]{a_0}\,x^p$, si m est pair.

b étant déterminé, formons la différence $A - b^m$ ou A'; ce sera un polynôme de degré inférieur à celui de A.

Si A' est nul identiquement, l'opération est terminée, on a :

$$A \equiv b^m.$$

Si A' n'est pas nul, appelons b' le second terme de B, que l'on suppose exister; d'après le n° **74**, le premier terme de A' est égal à $mb^{m-1}b'$. Donc, si A' est de degré inférieur à celui de b^{m-1}, l'opération est encore terminée : le polynôme B n'existe pas. Si A' est de degré au moins égal à celui de b^{m-1}, on obtient b' en divisant le premier terme de A' par mb^{m-1}.

b' étant déterminé, formons la différence $A-(b+b')^m$ ou A'' : ce sera un polynôme de degré inférieur à celui de A'.

Si A'' est nul identiquement, l'opération est finie; on a :

$$A \equiv (b+b')^m.$$

Si A'' n'est pas nul, appelons b'' le troisième terme de B; il

est aisé de voir comme n° **74** que le terme de degré le plus élevé dans A″, c'est-à-dire dans la différence

$$(b+b'+b''+..)^m-(b+b')^m,$$

est $mb^{m-1}b''$. Donc, si A″ est de degré inférieur à celui de b^{m-1}, l'opération est encore terminée; B n'existe pas. Si A″ est de degré au moins égal à celui de b^{m-1}, on obtient b'' en divisant le premier terme de A″ par mb^{m-1}. b'' étant déterminé, on formera la différence $A-(b+b'+b'')^m$ ou A‴; et ainsi de suite.

Finalement, puisque les degrés des polynômes A, A′, A″,... vont toujours en diminuant, ou bien on obtient une différence analogue à A′, A″, ... nulle identiquement; et alors on a $A\equiv B^m$, en appelant B le polynôme $b+b'+b''+\ldots$, dont les termes successifs ont été déterminés; ou bien on arrive à une différence R analogue à A′, A″,..., non nulle, et de degré inférieur à celui de b^{m-1}; alors il n'y a pas de polynôme B tel que l'on ait $A\equiv B^m$.

Dans ce dernier cas, en appelant toujours B le polynôme $b+b'+b''+\ldots$, on a l'identité

$$A\equiv B^m+R,$$

R étant de degré inférieur à $(m-1)$ fois celui de B, et R est dit le *reste* de l'opération, qui est une extraction de racine m^{me}.

Nous admettrons que le polynôme A ne peut se mettre sous la forme précédente que d'une seule façon : donc pour que A soit une puissance m^{me} exacte, il faut et il suffit que le reste R soit nul identiquement.

On remarquera que, si m est pair, b a deux valeurs égales et de signes contraires, et par suite B aussi; mais B^m n'en a qu'une seule.

Observons que l'identité précédente permet d'écrire

$$\sqrt[m]{A}\equiv B+\sqrt[m]{B^m+R}-B,$$

ce qui, à cause de la formule

$$a^m-b^m\equiv(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1}),$$

devient :

$$\sqrt[m]{A}\equiv B+\frac{R}{(\sqrt[m]{A})^{m-1}+(\sqrt[m]{A})^{m-2}B+\ldots+B^{m-1}}.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie qui donne lieu à des remarques analogues à celles que l'on fait à propos de la division, et que l'on peut étendre de la même façon au cas des polynômes à plusieurs lettres.

Exemples. — 1° Racine carrée de $A\equiv x^2+px+q$.

Le premier terme b de B est x (ou $-x$); la différence $A-b^2$ est $px+q$; en divisant px par $2b$, c'est-à-dire $2x$ (ou $-2x$), on

trouve b' éga à $\frac{p}{2}$ $\left(\text{ou } -\frac{p}{2}\right)$. La différence $A - (b + b')^2$ est $q - \frac{p^2}{4}$: c'est R. On a l'identité

$$x^2 + px + q \equiv \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

2° Racine cubique de

$$A \equiv x^9 + 3x^8 + 3x^7 + 3x^2 + 3x + 1.$$

On a d'abord $b \equiv x^3$, $A' \equiv 3x^8 + 3x^7 + 3x^2 + 3x + 1$;

puis $b' \equiv x^2$, $A' \equiv -x^6 + 3x^2 + 3x + 1$;

enfin $b'' \equiv -\frac{1}{3}$, $R \equiv 2x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 + 3x + \frac{28}{27}$;

d'où l'identité

$$x^9 + 3x^8 + 3x^7 + 3x^2 + 3x + 1 \equiv \left(x^3 + x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$$
$$+ 2x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 + 3x + \frac{28}{27}.$$

87. — Il est clair que toute expression algébrique peut se mettre sous la forme du quotient de deux expressions entières, rationnelles ou irrationnelles.

Nous allons maintenant démontrer l'importante proposition suivante :

Soit P *une expression algébrique entière irrationnelle; on peut toujours trouver une expression* Q *de même nature, telle que le produit* PQ *soit rationnel, et par suite puisse se mettre sous la forme d'un polynôme entier.*

Remarquons d'abord qu'en désignant certains radicaux simples par de nouvelles lettres, l'expression P devient rationnelle; c'est ainsi que si l'on a :

$$P \equiv a + 2\sqrt[3]{b - \sqrt{d}} + 3\sqrt[3]{(b - \sqrt{d})^2} + \sqrt[4]{d},$$

en faisant $\sqrt[4]{d} \equiv x$, $\sqrt[3]{b - \sqrt{d}} \equiv \sqrt[3]{b - x^2} \equiv y$,

l'expression prend la forme d'un polynôme

$$a + 2y + 3y^2 + x.$$

Si donc on multiplie l'expression P par une expression Q de

même nature, on obtient un produit PQ, encore de même nature, et qui par suite dépend des mêmes radicaux que P : aucun radical nouveau n'a pu s'introduire, mais quelques-uns ont pu disparaître. Il est bien entendu toutefois que le produit de deux radicaux, par exemple, n'est pas considéré comme un radical nouveau.

Ceci posé, il est clair que, pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que si l'on considère P comme dépendant d'un seul radical simple, on peut multiplier P par une expression Q telle que le produit PQ ne contienne plus ce radical : car l'application répétée du même procédé permettra alors de faire disparaître successivement tous les radicaux qui figurent dans P.

Appelons $\sqrt[n]{X}$ le radical simple dont dépend P ; alors l'expression P peut être mise sous la forme

$$P \equiv A_0 + A_1 \sqrt[n]{X} + A_2 (\sqrt[n]{X})^2 + \ldots + A_{n-1} (\sqrt[n]{X})^{n-1},$$

$A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ étant des expressions de même nature que P, mais indépendantes du radical $\sqrt[n]{X}$: en effet, d'après ce qui a été dit, P doit être un polynôme par rapport à $\sqrt[n]{X}$, et il est inutile de supposer que ce polynôme contient des puissances de $\sqrt[n]{X}$ d'exposant supérieur à $n - 1$, puisque l'on a :

$$(\sqrt[n]{X})^n \equiv X, \; (\sqrt[n]{X})^{n+1} \equiv X \sqrt[n]{X}, \ldots$$

Supposons d'abord $n = 2$; alors P est de la forme

$$P \equiv A_0 + A_1 \sqrt{X} ;$$

prenons $$Q \equiv A_0 - A_1 \sqrt{X} ;$$

il vient $$PQ \equiv A_0^2 - A_1^2 X,$$

et PQ ne dépend plus de $\sqrt{X}$.

Supposons maintenant $n = 3$; alors P est de la forme

$$P \equiv A_0 + A_1 \sqrt[3]{X} + A_2 (\sqrt[3]{X})^2 ;$$

en profitant de l'identité :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab),$$

nous prendrons :

$$Q \equiv A_0^2 - A_1 A_2 X + (A_2^2 X - A_0 A_1) \sqrt[3]{X} + (A_1^2 - A_0 A_2)(\sqrt[3]{X})^2 ;$$

il vient alors :

$$PQ \equiv A_0^3 + A_1^3 X + A_2^3 X^2 - 3 A_0 A_1 A_2 X,$$

et PQ ne dépend plus de $\sqrt[3]{X}$.

Quand n est supérieur à 3, on peut trouver de même des expressions Q répondant à la question ; nous ne les développerons pas ici, à cause de leur complication et de leur peu d'emploi. Cependant, si l'on a simplement :

$$P \equiv A_0 + A_1 \sqrt[n]{X},$$

on voit aisément qu'il suffira de prendre :

$$Q \equiv A_0^{n-1} - A_0^{n-2} A_1 \sqrt[n]{X} + A_0^{n-3} A_1^2 (\sqrt[n]{X})^2 - A_0^{n-4} A_1^3 (\sqrt[n]{X})^3 + \ldots,$$

pour avoir :

$$PQ \equiv A_0^n - (-1)^n A_1^n X.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de faire $A_0 \equiv a$, $-A_1 \sqrt[n]{X} = b$, et de se rappeler l'identité

$$a^n - b^n \equiv (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots).$$

88. — Une conséquence du théorème précédent est que toute expression algébrique peut se mettre sous la forme d'une fraction à termes entiers, l'un de ces termes, le dénominateur par exemple, pouvant toujours être choisi rationnel; en effet, si $\frac{A}{B}$ est une fraction à termes entiers, et si B' est une expression telle que le produit BB' soit rationnel, on peut remplacer la fraction donnée par la fraction $\frac{AB'}{BB'}$, dont le dénominateur est rationnel et entier.

C'est en général sous une telle forme que l'on écrit les fractions algébriques.

Exemples. — 1° Transformer la fraction

$$\frac{A}{a + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}},$$

de façon que son dénominateur devienne rationnel.

En multipliant haut et bas par $a + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x}$, on fait disparaître au dénominateur le radical $\sqrt{x}$, et l'on obtient un nouveau dénominateur égal à

$$(a + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - x,$$

ou encore à :

$$a^2 - x + y + z + 2a\sqrt{z} + 2(a + \sqrt{z})\sqrt{y};$$

en multipliant haut et bas par

$$a^2 - x + y + z + 2a\sqrt{z} - 2(a + \sqrt{z})\sqrt{y},$$

on fait disparaître au dénominateur le radical $\sqrt{y}$, et l'on obtient un nouveau dénominateur qui se met sous la forme $a' + b'\sqrt{z}$.

Il suffit alors de multiplier haut et bas par $a' - b'\sqrt{z}$, pour faire disparaître au dénominateur le dernier radical $\sqrt{z}$; le dénominateur définitif est $a'^2 - b'^2 z$.

2° Transformer la fraction

$$\frac{\mathrm{A}}{a + \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}}$$

de façon que son dénominateur devienne rationnel.

D'abord on peut multiplier haut et bas par $a + \sqrt[3]{y} - \sqrt{x}$, ce qui donne comme nouveau dénominateur :

$$a^2 - x + 2a\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2;$$

il suffit alors de multiplier par la quantité

$$(a^2 - x)^2 - 2ay + (y - 2a(a^2 - x))\sqrt[3]{y} + (4a^2 - (a^2 - x))(\sqrt[3]{y})^2,$$

pour obtenir le dénominateur rationnel

$$(a^2 - x)^3 + 8a^3 y + y^2 - 6a(a^2 - x)y.$$

On aurait pu aussi multiplier d'abord par

$$(a + \sqrt{x})^2 - (a + \sqrt{x})\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2,$$

et l'on aurait obtenu le dénominateur

$$(a + \sqrt{x})^3 + y \quad \text{ou} \quad (a^3 + 3ax + y) + (3a^2 + x)\sqrt{x};$$

en multipliant encore par

$$(a^3 + 3ax + y) - (3a^2 + x)\sqrt{x},$$

on aurait obtenu le dénominateur rationnel

$$(a^3 + 3ax + y)^2 - (3a^2 + x)^2 x,$$

qui ne diffère pas du précédent.

Remarque. — La même méthode de transformation s'applique évidemment aux fractions numériques; il suffit de rai-

sonner sur les nombres comme sur des lettres. C'est ainsi que l'on a :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(1+2\sqrt{2})+(2+2\sqrt{2})\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\left[(2+2\sqrt{2})\sqrt{3}-(1+2\sqrt{2})\right]}{27+20\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\left[(2+2\sqrt{2})\sqrt{3}-(1+2\sqrt{2})\right](20\sqrt{2}-27)}{71}.$$

Exercices

1. — Faire la somme des polynômes :

$4x^3-5x^2+2x-1,\ 7x^2-5x+4,\ 3x^3-9x+1,$
$-8x^3+8x^2-5.$

2. — Faire la somme des polynômes :

$2x^2+y^2+2xy-5x-2y+17,\ x^2+4y^2-4xy+2x-20y+3,$
$-2x^2+y^2-4xy-9x+6y-24.$

3. — Calculer $P-Q+R-S$, sachant que :

$$P\equiv\frac{3}{5}a^5+\frac{7}{8}a^4b-\frac{3}{10}a^3b^2+\frac{3}{5}b^5,$$

$$Q\equiv\frac{9}{5}a^4b+\frac{2}{3}a^2b^3-5ab^4,$$

$$R\equiv\frac{19}{6}a^5-\frac{3}{4}a^2b^3+\frac{5}{6}ab^4-\frac{3}{5}b^5,$$

$$S\equiv\frac{9}{2}a^5-\frac{19}{4}b^5.$$

4. — Réduire l'expression

$$a^2-(b^2-c^2)-\left(b^2-(c^2+a^2)\right)+\left(c^2-(a^2-b^2)\right).$$

5. — Multiplier x^5-4x^3+5x-1 par x^4+3x^2-4.

6. — Calculer le produit $(x^2+2x+4)(x+5)(x+6)(x-3)$.

7. — Calculer le produit

$(2x^2+y^2+2xy-5x-2y+4)(x^2+4y^2-4xy+2x-5y-3).$

8. — Calculer le produit

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z).$$

9. — Calculer $(3a^2 - 4b^2 + 5ab)(3a^2 + 4b^2 - 5ab)$.

10. — Vérifier l'identité

$$(ac' - ca')^2 - 4(ab' - ba')(bc' - cb') \equiv (ac' + ca' - 2bb')^2 - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2).$$

11. — Dans l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$, on remplace x et y respectivement par $px' + qy'$ et $rx' + sy'$; l'expression prend la forme $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Calculer a', b', c'; montrer que l'on a :

$$a'c' - b'^2 \equiv (ac - b^2)(ps - qr)^2.$$

12. — Dans les deux expressions $ax^2 + 2bxy + cy^2$ et $a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$, on remplace x et y respectivement par $px' + qy'$ et $rx' + sy'$; elles deviennent respectivement $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ et $a'_1x'^2 + 2b'_1x'y' + c'_1y'^2$. Montrer que l'on a :

$$a'c'_1 + c'a'_1 - 2b'b'_1 \equiv (ac_1 + ca_1 - 2bb_1)(ps - qr)^2.$$

13. — Dans l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$, on remplace x, y, z respectivement par $lx' + my' + nz'$, $px' + qy' + rz'$, $sx' + ty' + uz'$; l'expression prend la forme $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$; calculer a', b', c', d', e', f' et montrer que l'on a :

$$a'c'f' + 2b'd'e' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 \equiv (acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2)(lqu + npt + mrs - mpu - lrt - nqs)^2.$$

14. — Dans l'expression $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, on remplace x et y respectivement par $px' + qy'$ et $rx' + sy'$; l'expression prend la forme $a'x'^3 + 3b'x'^2y' + 3c'x'y'^2 + d'y'^3$. Calculer a', b', c', d' et montrer que l'on a :

$$a'^2d'^2 + 4a'c'^3 + 4b'^3d' - 3b'^2c'^2 - 6a'b'c'd' \equiv (a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2 - 6abcd)(pr - qs)^6.$$

15. — Dans l'expression $ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$, on remplace x et y respectivement par $px' + qy'$ et $rx' + sy'$; l'expression prend la forme $a'x'^4 + 4b'x'^3y' + 6c'x'^2y'^2 + 4d'x'y'^3 + e'y'^4$; calculer a', b', c', d', e' et montrer que l'on a :

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 \equiv (ae - 4bd + 3c^2)(pr - qs)^4,$$

$$a'c'e' + 2b'c'd' - a'd'^2 - b'^2e' - c'^3 \equiv (ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3)(pr - qs)^6.$$

16 — Montrer que l'on a :

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2 - 6abcd$$
$$\equiv (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$
$$\equiv \frac{1}{a^2}\left\{ 4(ac - b^2)^3 + (a^2d - 3abc + 2b^3)^2 \right\}.$$

17. — Réduire l'expression

$$\Big(c(x^2 + y^2 - ax) - ay\Big)\Big(x^2 + y^2 - a'x + a'c'y\Big)$$
$$-\Big(c'(x^2 + y^2 - a'x) - a'y\Big)\Big(x^2 + y^2 - ax + acy\Big).$$

Réponse :

$$(x^2+y^2)\Big\{(c-c')\big[x^2+y^2-(a+a')x+aa'\big]+(a'-a)(1+cc')y\Big\}.$$

18. — Vérifier l'identité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2 \equiv (bc'-cb')^2$$
$$+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

19. — Vérifier les identités

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \equiv (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$
$$\equiv (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

20. — Vérifier l'identité

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)$$
$$\equiv (aa' + bb' + cc' + dd')^2 + (ab' - ba' + cd' - dc')^2$$
$$+ (ac' - ca' - bd' + db')^2 + (ad' - da' + bc' - cb')^2.$$

21. — Vérifier l'identité

$$(x - a)^2(b - c) + (x - b)^2(c - a) + (x - c)^2(a - b)$$
$$+ (b - c)(c - a)(a - b) \equiv 0.$$

En déduire une relation entre les distances mutuelles de quatre points en ligne droite.

22. — Diviser $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ par $x - 2$.

23. — Diviser $12x^6 - 20x^5 + 4x^4 + 30x^3 - 66x^2 + 46x - 8$ par $4x^4 - 8x + 2$.

24. — Diviser $17x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 7$ par $x^2 + 2x + 5$.

25. — Diviser $7x^8 - 5x^5 + 4$ par $x^2 - 5x + 3$.

26. — Diviser $(a^4 + a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 + b^4)x^4$
$$- (6a^4b + a^3b^2 + 7a^2b^3 + ab^4)x^3$$
$$+ (7a^5b + 4a^4b^2 + 17a^3b^3 + 4a^2b^4)x^2$$
$$- 31a^4b^2x + 28a^5b^3$$
par $(a^2 + ab + b^2)x^2 - 6a^2bx + 7a^3b$.

27. — Simplifier la fraction $\frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^5-1)}$.

28. — Montrer que $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$ est divisible par $(y+z)(z+x)(x+y)$ quand m est impair.

29. — Réduire

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

30. — Réduire

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + \frac{ca}{b(b^2-c^2)(b^2-a^2)} + \frac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

31. — Réduire

$$\frac{a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)-4abc}{a+b+c-abc}.$$

32. — Réduire

$$\frac{(ab-cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac-bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)}{(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)+4(ab-cd)(ac-bd)}.$$

33. — Réduire

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

34. — Mettre $\frac{x^9-1}{x^4+4}$ sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'une fraction dont le numérateur est de degré inférieur à 4.

35. — Quelle relation doit exister entre les nombres p et q pour que x^2+px+q soit divisible par $x-5$?

36. — Quelle relation doit exister entre les nombres p et q, pour que x^3+px+q soit divisible par $x+5$?

37. — Quelles relations doivent exister entre les nombres p et q pour que x^3+px+q soit divisible par x^2-3x+2 ?
Déterminer les nombres p et q.

38. — Simplifier la fraction

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$$

39. — Simplifier la fraction

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}-\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}}.$$

40. — Simplifier l'expression

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}.$$

41. — Simplifier l'expression

$$\frac{\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}{\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}.$$

42. — Simplifier

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}.$$

43. — Simplifier l'expression

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3.$$

44. — Vérifier l'identité

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\equiv\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

45. — Vérifier l'identité

$$x^3+px+q\equiv 0,$$

x désignant l'expression

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{4}}}.$$

46. — Extraire la racine carrée de $x^4+px^3+qx^2+rx+s$. Dans quel cas ce polynôme est-il carré parfait?

47. — Extraire la racine cubique du polynôme

$$x^{12}+3x^4+6x^{10}+6x^2+3x+1.$$

48. — Vérifier les identités

$$\frac{1}{1-x}=1+\frac{x}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}, \text{ etc.}$$

Appliquer ces formules au calcul numérique de $\frac{1}{1-x}$ quand x est très petit en valeur absolue.

49. — Vérifier les identités

$$\frac{1+mx}{1+nx}=1+\frac{(m-n)x}{1+nx}=1+(m-n)x-\frac{n(m-n)x^2}{1+nx}, \text{ etc.}$$

Application au cas de x très petit.

50. — Vérifier les identités

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x}}$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{64}}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}}$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{\frac{5x^4}{64}-\frac{x^5}{64}+\frac{x^6}{256}}{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\sqrt{1+x}}.$$

Application au cas de x très petit.

51. — Vérifier l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2+x^3}{4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\sqrt{1-x}\right)}.$$

Application au cas de x très petit.

52. — Vérifier l'identité

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1+x+\frac{x^2}{1-x+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

Application au cas de x très petit.

53. — Obtenir une formule analogue aux précédentes en formant la différence $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\left(1+\frac{2}{3}x\right)$, de façon à ne plus laisser de radicaux en numérateur.

54. — Transformer en fractions à dénominateurs rationnels les fractions

$$\frac{2+\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{3}},\quad \frac{5-\sqrt[4]{14}}{5+\sqrt[4]{14}},\quad \frac{3}{5-\sqrt{3}}.$$

55. — Même question pour les fractions

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}},\quad \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}},\quad \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{5}},$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}},\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt[4]{6}}{\sqrt{6}-\sqrt[4]{6}},\quad \frac{8}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[4]{10}}.$$

56. — Même question pour les fractions

$$\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{7}+\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \frac{9-\sqrt{30}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{40}+\sqrt{50}}.$$

57. — Même question pour les fractions

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}.$$

58. — Même question pour la fraction

$$\frac{1}{2+\sqrt{5-\sqrt{2}}-\sqrt{7+\sqrt{3}}}.$$

59. — Même question pour la fraction

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3+\sqrt{6}}}.$$

60. — Démontrer les identités

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\\ (\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\end{array}\right\}\equiv\left\{\begin{array}{l}-a^2-b^2-c^2\\ +2bc+2ca+2ab,\end{array}\right.$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}-\sqrt[3]{ab})$$
$$\equiv a+b+c-3\sqrt[3]{abc},$$

et en déduire un moyen rapide de chasser les radicaux des dénominateurs dans les fractions de la forme

$$\frac{A}{\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} \quad \text{et} \quad \frac{A}{\pm\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}.$$

CHAPITRE V

NOMBRES INFINIMENT GRANDS. VALEUR NUMÉRIQUE D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE DANS LES CAS EXCEPTIONNELS.

89. — Un nombre *variable* x est dit *infiniment petit* lorsque la nature de sa variation lui permet d'être aussi petit que l'on veut en valeur absolue. Un nombre fixe, si petit qu'il soit, n'est pas infiniment petit.

Un nombre *variable* x a pour *limite* un nombre fixe a, ou bien tend vers la limite a, lorsque la différence $x - a$ est infiniment petite.

Nous admettrons qu'un nombre variable qui va toujours en croissant et qui reste plus petit qu'un nombre fixe A, a une limite au plus égale à A. De même, un nombre variable qui va toujours en décroissant et qui reste plus grand qu'un nombre fixe A, a une limite au moins égale à A.

Nous admettrons aussi, sans démonstration, que le résultat d'un calcul limité fait sur des nombres variables ayant des limites, a lui-même une limite, égale au résultat du même calcul fait sur les limites des nombres variables considérés, à la condition que ce dernier calcul soit possible. En particulier, il en résulte que la valeur numérique d'une expression algébrique quelconque dépendant de lettres x, y, z,.. a une limite lorsque les valeurs numériques attribuées à ces lettres tendent respectivement vers des limites x_0, y_0, z_0,... et que cette limite est précisément la valeur numérique que prend cette expression quand on y remplace x, y, z,... par x_0, y_0, z_0,... à la condition, toutefois, que cette dernière valeur numérique existe. C'est ainsi que $\frac{1}{x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 2, mais n'a pas de limite quand x est infiniment petit, parce que, par $x = 0$, l'expression $\frac{1}{x}$ n'a pas de valeur numérique.

90. — Un nombre *variable* x est dit *infiniment grand* ou

simplement *infini*, lorsque la nature de sa variation lui permet d'être aussi grand qu'on le veut en valeur absolue. On écrit alors

$$x = \infty.$$

Si le nombre x devient infini en restant toujours positif, on écrit $x = +\infty$; s'il devient infini en restant toujours négatif, on écrit $x = -\infty$.

Un nombre fixe, si grand qu'il soit, n'est pas infiniment grand.

L'inverse d'un nombre infiniment petit est infini; c'est-à-dire que x tendant vers zéro, $\frac{1}{x}$ peut être rendu plus grand en valeur absolue qu'un nombre positif donné à l'avance A, aussi grand qu'on le veut. En effet, il suffit de prendre x inférieur à $\frac{1}{A}$ en valeur absolue.

La racine carrée arithmétique de l'inverse d'un nombre infiniment petit, positif nécessairement, est de même égale à $+\infty$, car pour avoir

$$\sqrt{\frac{1}{x}} > A,$$

il suffit que l'on ait

$$x < \frac{1}{A^2}.$$

91. — Considérons une expression algébrique A dépendant de lettres x, y, z,... et supposons que pour certaines valeurs x_0, y_0, z_0,... données à ces lettres, l'expression A n'ait pas de valeur numérique, parce que les opérations indiquées deviennent dénuées de sens, par suite de la présence de divisions à diviseurs nuls.

Imaginons qu'au lieu de donner aux lettres les valeurs x_0, y_0, z_0,... on leur donne successivement des valeurs variables ayant respectivement pour limites les nombres x_0, y_0, z_0...; alors A prendra en général une valeur numérique variable a (si, même dans ces conditions, A n'avait pas de valeur numérique, on ne pourrait rien dire de plus). Il peut arriver :

1° que le nombre variable a tende vers une limite a_0; alors on dit que a_0 est la valeur numérique de A pour

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ldots$$

2° que le nombre variable a soit infiniment grand, c'est-à-dire que sa valeur absolue puisse devenir plus grande que tout nombre positif donné; alors on dit que l'expression A est infinie pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$,...

3° que le nombre variable a ne tende vers aucune limite, et qu'il ne devienne pas non plus infiniment grand. Alors, suivant

la façon dont on fera tendre $x, y, z....$ vers leurs limites respectives $x_0, y_0, z_0....$ a tendra vers une certaine limite ou vers une autre : on dit que A est indéterminée pour

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0 .....$$

L'indétermination est totale si a peut tendre vers une limite quelconque donnée à l'avance; sinon elle est partielle.

Avant de donner des exemples, observons que si deux expressions algébriques sont identiques suivant la définition donnée au nº **62**, elles prennent nécessairement, en vertu même des conventions que nous venons de faire, même valeur numérique, finie ou infinie, pour tout système de valeurs attribuées aux lettres ; et de plus, si l'une d'elles devient indéterminée, l'autre le devient dans les mêmes conditions.

De la même façon, les principes admis au nº **89** demeurent toujours vrais, à la seule condition de modifier le langage convenablement.

92. — Pour trouver la valeur numérique d'une expression A pour un système de valeurs exceptionnelles $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0,...$ on commencera par mettre A sous la forme du rapport $\frac{P}{Q}$ de deux expressions entières P et Q, ce qui est toujours possible et légitime d'après ce que nous venons de dire.

Il pourra arriver ainsi que la difficulté disparaisse.

Exemple. — Soit à chercher la valeur de

$$A \equiv \frac{x - 3 + \frac{4}{x-2}}{5x - 4 + \frac{3}{x^2 - 4}}$$

pour $x = 2$. C'est un cas exceptionnel.

Mais on a en multipliant haut et bas par $x^2 - 4$ ou $(x-2)(x+2)$

$$A \equiv \frac{(x-3)(x^2-4) + 4(x+2)}{(5x-4)(x^2-4)+3},$$

et par suite pour $x = 2$, A a la valeur numérique $\frac{16}{3}$.

En effet, la valeur numérique de A est toujours celle de la fraction $\frac{(x-3)(x^2-4)+4(x+2)}{(5x-4)(x^2-4)+3}$ pour toute valeur de x différente de 2. Si x tend vers 2, la valeur de cette fraction tend vers sa valeur $\frac{16}{3}$ pour $x = 2$; donc, par définition, $\frac{16}{3}$ est la valeur de A pour $x = 2$.

Si la difficulté n'a pas disparu, c'est que pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ Q s'annule. Alors deux cas peuvent se présenter :

1° Pour $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ P prend une valeur P_0 non nulle.

Dans ce cas, l'inverse $\frac{Q}{P}$ de A prend la valeur 0 pour $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$, et par suite a une valeur infiniment petite lorsque x, y, z, ... tendent respectivement vers x_0, y_0, $z_0, \ldots$; donc A a une valeur infiniment grande dans les mêmes conditions : A est infinie pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$.

Ainsi l'expression

$$\frac{a - mb}{1 - m},$$

que nous avons rencontrée au n° **51** pour définir l'abscisse du point qui partage dans le rapport m le segment dont l'origine et l'extrémité ont pour abscisses a et b, est infinie pour $m = 1$, a et b ayant nécessairement des valeurs distinctes.

2° Pour $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ P s'annule aussi.

Dans ce cas, on cherchera à remplacer $\frac{P}{Q}$ par une expression identique de même forme pour laquelle le même fait ne se reproduise pas; ou bien on se livrera à une recherche directe.

Exemples. — 1° Soit

$$A \equiv \frac{x^2 - y^2}{x - y}.$$

Pour $x = 0$, $y = 0$, A a la valeur 0, parce que l'on a :

$$A \equiv x + y.$$

2° Soit

$$A \equiv \frac{y}{x};$$

Pour $x = 0$, $y = 0$, A est absolument indéterminée, car la valeur numérique de A sera égale à a_0 si y tend vers zéro en même temps que x, mais de façon à être égal au produit $a_0 x$.

3° Soit

$$A \equiv 1 + \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Pour $x = 0$, $y = 0$ l'expression A est partiellement indéterminée; elle peut prendre toute valeur numérique au moins égale à 1.

4° Considérons le cas particulièrement important où P et Q sont des polynômes dépendant d'une seule lettre x.

Alors, s'ils s'annulent pour $x = x_0$, c'est qu'ils sont divisibles par $x - x_0$, et si P' et Q' sont les quotients, on a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'};$$

on est ainsi ramené à l'étude plus simple et analogue de $\frac{P'}{Q'}$.

Ainsi soit

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

Pour $x = 1$, les deux termes de la fraction s'annulent; divisant par $x - 1$, on a la fraction identique

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1},$$

dont les deux termes s'annulent encore pour $x = 1$.

Divisant par $x - 1$, on a la nouvelle fraction identique

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{x + 2}{x - 1};$$

ici Q'' seul s'annule pour $x = 1$. Donc la valeur de $\frac{P}{Q}$ pour $x = 1$ est infinie.

Quand x tend vers 1 par valeurs plus petites, P'' est positif et Q'' négatif : $\frac{P}{Q}$ tend vers $-\infty$; si x tend vers 1 par valeurs plus grandes, P'' et Q'' sont tous deux positifs : $\frac{P}{Q}$ tend vers $+\infty$.

93. — Puisque nous avons étendu le domaine des nombres algébriques par l'introduction des nombres infinis, il faut encore définir ce qu'on appellera valeur numérique d'une expression algébrique A lorsque certaines des lettres qui y figurent reçoivent des valeurs infinies, les autres recevant des valeurs finies.

Si par exemple on veut définir la valeur numérique de A pour $x = \infty$, $y = \infty$, $z = z_0$,.. . on donnera aux lettres des valeurs x, y, z,... augmentant les deux premières au delà de toute limite en valeur absolue, la troisième tendant vers z_0,... A prend alors en général une valeur numérique variable a, sur laquelle on peut répéter ce que nous avons dit au n° **91**.

1° Si a a une limite a_0, a_0 est la valeur de A pour $x = \infty$, $y = \infty$, $z = z_0$...

2° Si a est infiniment grand, A est infinie pour $x = \infty$, $y = \infty$, $z = z_0$...

3° Si a ne tend vers aucune limite, A est indéterminée pour

$x = \infty$, $y = \infty$, $z = z_0 \ldots$; l'indétermination est totale ou partielle.

Les remarques que nous avons faites à la fin du nº **91** s'étendent d'elles-mêmes aux nouveaux cas que nous venons d'envisager.

Pratiquement, pour chercher la valeur de A pour $x = \infty$, $y = \infty$, $z = z_0, \ldots$ on remplacera x et y par $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{y'}$, et on cherchera la valeur de la nouvelle expression pour $x' = 0$, $y' = 0$, $z = z_0 \ldots$ Il est clair que cela revient au même.

Exemples. — 1º L'expression

$$A = \frac{y}{x}$$

est totalement indéterminée par $x = \infty$, $y = \infty$.

Pour $x = \infty$, $y = a$ (a étant fini), elle est nulle.

Pour $x = a$ (a étant fini), $y = \infty$, elle est infinie.

2º Considérons le cas particulièrement important où A est le quotient de deux polynômes P et Q dépendant d'une seule lettre x :

$$A = \frac{P}{Q} = \frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots}{a'x^p + b'x^{p-1} + c'x^{p-2} + \ldots},$$

a et a' étant des nombres non nuls, b, c, b', c', . . des nombres finis quelconques.

Remplaçons x par $\frac{1}{x'}$.

1º Si $n = p$, on a :

$$A = \frac{a + bx' + cx'^2 + \ldots}{a' + b'x' + c'x'^2 + \ldots},$$

et par suite la valeur de A pour $x = \infty$ est $\frac{a}{a'}$.

2º Si $n < p$, on a :

$$A = x'^{p-n} \frac{a + bx' + cx'^2 + \ldots}{a' + b'x' + c'x'^2 + \ldots},$$

et par suite la valeur de A pour $x = \infty$ est 0.

3º Si $n > p$, on a :

$$A = \frac{a + bx' + cx'^2 + \ldots}{x'^{n-p}(a' + b'x' + c'x'^2 + \ldots)},$$

et par suite la valeur de A pour $x = \infty$ est infinie.

Ainsi l'expression $\frac{a - mb}{1 - m}$ du nº **51** est égale à $\frac{-b}{-1}$ ou b pour $m = \infty$.

Remarque. — Grâce aux définitions données dans ce chapitre, on voit qu'il n'y a plus pour nous qu'une seule opération impossible, savoir l'extraction des racines d'indice pair pour les nombres négatifs. Il est bien entendu, une fois pour toutes, que nous ne donnerons jamais aux lettres qui figurent dans une expression algébrique quelconque de valeurs numériques conduisant à de telles opérations.

Remarque. — Il est essentiel d'observer qu'un nombre déterminé ou fixe est nécessairement fini; on ne peut être amené aux nombres infinis que par la considération de nombres variables.

Exercices

1. — Déterminer les valeurs de la fraction $\frac{x^3 - 5x + 4}{(x-1)(x^2-4)}$, pour $x = \infty$, $x = 1$, $x = \pm 2$.

2. — Valeur de $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ pour $x = +\infty$.

3. — Valeur de $\frac{(x-x_0)^m \mathrm{P}}{(x-x_0)^n \mathrm{Q}}$ pour $x = x_0$, P et Q étant des polynômes qui ne s'annulent pas pour $x = x_0$.

4. — Valeur de $\frac{5+3x}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x-5}{x^2 - x - 2}$ pour $x = 2$.

5. — Valeur de $\frac{a - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ pour $x = 0$, a étant un nombre positif ou négatif.

(On fait disparaître le radical au numérateur.)

6. — Valeur de $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$ pour $x = \infty$.

7. — Valeur de $\frac{x^n - y^n}{x^p - y^p}$ pour $x = y$.

8. — Valeur de $\frac{x^n - y^n}{x^p - y^p}$ pour $x = -y$, n et p étant pairs.

9. — Valeur de $\frac{x^n + y^n}{x^p + y^p}$ pour $x = -y$, n et p étant impairs.

10. — Valeur de $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{1-x}$ pour $x = 1$.

LIVRE II

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS ET AUX INÉGALITÉS. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

§ 1er. — Définitions.

94. — Si deux nombres a et b sont égaux, on exprime ce fait par l'*égalité*

$$a = b.$$

Si deux expressions algébriques A et B sont identiques, c'est-à-dire prennent même valeur numérique quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, on exprime ce fait par l'*identité*

$$A \equiv B.$$

Si deux expressions algébriques P et Q dépendant d'un certain nombre de lettres x, y, z,... ne sont pas identiques, elles peuvent prendre même valeur numérique lorsqu'on donne aux lettres certaines valeurs particulières x_0, y_0, z_0...; l'écriture

$$P = Q$$

est une *équation numérique*.

De même, si deux expressions algébriques P et Q dépendant de lettres a, b, c,... x, y, z,... ne sont pas identiques, elles peuvent le devenir quand on y remplace les

lettres x, y, z,... par certains nombres ou certaines expressions algébriques nouvelles renfermant les autres lettres a, b, c...; l'écriture

$$P = Q$$

est alors une *équation littérale.*

Dans une équation numérique ou littérale $P = Q$, on dit que les lettres x, y, z,... que l'on remplace par certains nombres, ou certaines expressions algébriques nouvelles renfermant les autres lettres, pour obtenir une égalité ou une identité, sont les *inconnues;* on les représente d'habitude, comme nous l'avons fait, par les dernières lettres de l'alphabet; les autres lettres, s'il y en a, sont les *paramètres.*

Un système x_0, y_0, z_0,... de valeurs numériques ou littérales *déterminées*, et par suite essentiellement *finies*, attribuées aux inconnues x, y, z,... qui transforme une équation en égalité ou identité, est dit un *système de solutions* de l'équation. *Résoudre* une équation, c'est chercher tous les systèmes de solutions de cette équation. On dit encore que x_0, y_0, z_0,... *vérifient* l'équation proposée ou *satisfont* à l'équation proposée.

Une équation est dite à *une inconnue*, à *deux inconnues*, à *trois inconnues*,... suivant qu'elle renferme une, deux, trois,... inconnues.

Si l'équation ne renferme qu'une inconnue x et est vérifiée pour $x = x_0$, on dit encore que x_0 est une *solution* ou une *racine* de l'équation proposée.

Exemples. — L'équation

$$x^2 = 5x - 6$$

est une équation numérique à une inconnue qui admet les deux racines 2 et 3.

L'équation

$$x^2 - y^2 = 9$$

est une équation numérique à deux inconnues qui admet le système de solutions $x = 5$, $y = -4$.

L'équation

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

est une équation littérale à une inconnue, qui est vérifiée par les deux racines a et b : a et b sont les paramètres de l'équation.

L'équation

$$x^2 - y^2 = 4ab$$

est une équation littérale à deux inconnues et à deux paramètres, à laquelle satisfait le système de solutions

$$x \equiv a + b, \quad y \equiv a - b.$$

On dit d'une équation qu'elle est *rationnelle* ou *irrationnelle*, *entière* ou *fractionnaire*, par rapport à certaines inconnues, en même temps que les expressions algébriques qui y figurent sont elles-mêmes rationnelles ou irrationnelles, entières ou fractionnaires, par rapport à ces inconnues. Si l'on considère à la fois toutes les inconnues, l'équation est dite alors simplement *rationnelle* ou *irrationnelle*, *entière* ou *fractionnaire* suivant le cas.

Le *degré* d'une équation entière et rationnelle par rapport à certaines inconnues est la somme des exposants de ces inconnues dans les termes où cette somme a la plus grande valeur; le degré total ou simplement degré d'une équation entière et rationnelle est la somme des exposants des inconnues dans les termes où cette somme a la plus grande valeur.

De même que les polynômes, les équations entières et rationnelles ont une importance prépondérante. C'est à leur résolution que l'on ramène celle de toutes les autres.

Exemple. — L'équation

$$x^2 + \sqrt{a + y} - 25x = 37y^2$$

est entière et rationnelle du second degré par rapport à x.

L'équation

$$x^3y^2 - 5xy = 3x^2y^3 + 4$$

est entière et rationnelle du cinquième degré.

Plusieurs équations qui renferment les mêmes inconnues et qui admettent des systèmes de solutions communs sont dites former un système d'*équations simultanées*.

On peut répéter sur un système d'équations simultanées ce que nous avons dit sur les équations isolées.

Ainsi le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$$

est vérifié par le système de solutions $x = 5$, $y = 4$. Ce sont deux équations numériques entières et rationnelles à deux inconnues; chacune d'elles est du second degré.

Résoudre un système d'équations simultanées, c'est chercher tous les systèmes de solutions qui vérifient simultanément toutes les équations du système.

95. — Nous avons déjà insisté sur ce fait que les solutions d'une ou plusieurs équations étaient nécessairement finies; c'est qu'en effet prendre un nombre variable (et les nombres infinis sont essentiellement variables) comme solution d'une équation n'a aucun sens.

Soit une équation $P = Q$, et remarquons que si x_0, y_0, z_0,... forment un système de solutions de cette équation, la différence des valeurs numériques de P et Q est nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$,... et inversement. Alors, si pour certaines valeurs x_0, y_0, z_0,... attribuées aux inconnues, les quantités P et Q deviennent toutes deux infinies ou toutes deux indéterminées, ces valeurs formeront encore un système de solutions de l'équation, si la différence $P - Q$ a une valeur nulle, ou devient indéterminée avec possibilité de devenir nulle, quand on y fait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$,... et dans ces cas seulement.

De même, les quantités x_0, y_0, z_0,... forment un système de solutions pour plusieurs équations simultanées, $P = Q$, $P' = Q'$, $P'' = Q''$,... bien qu'elles rendent un certain nombre des expressions P, Q, P', Q',... infinies ou indéterminées, si, comme dans le cas général, ces valeurs vérifient séparément les diverses équations données.

Exemples. — L'équation

$$\frac{x^2}{x+2} = 5 + \frac{4}{x+2}$$

n'admet pas la racine $x = -2$, parce que pour cette valeur, la différence des deux membres prend la valeur -9.

Au contraire l'équation

$$\frac{x^2}{x+2} = -4 + \frac{4}{x+2}$$

admet la racine $x = -2$; car, pour cette valeur, la différence des deux membres prend la valeur 0.

L'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$$

admet le système de solutions $x = 0$, $y = 0$, qui rendent le premier membre totalement indéterminé.

Le système d'équations simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5 \end{array}\right.$$

admet de même le système de solutions $x = 0$, $y = 0$.

96. — Toutes ces remarques s'appliquent aussi bien aux équations numériques et aux équations littérales: mais, dans ce dernier cas, on est encore amené à faire de nouvelles conventions, en observant les mêmes principes qu'au chapitre v du livre Ier.

Supposons que pour une équation littérale ou un système d'équations littérales simultanées, on ait trouvé tous les systèmes de solutions et soit x_0, y_0, z_0, ... l'un d'eux.

Donnons maintenant aux paramètres des valeurs particulières finies ou infinies a_0, b_0, c_0...; alors, les expressions algébriques x_0, y_0, z_0,... prendront certaines valeurs numériques finies ou infinies, déterminées ou indéterminées, x'_0, y'_0, z'_0... D'autre part, si l'on remplace dans les équations données a, b, c,... par a_0, b_0, c_0,... on obtient un système d'équations numériques qui admettra en général tous les systèmes de solutions x'_0, y'_0, z'_0,... et seulement ceux-là.

Nous avons dit *en général*, parce que des exceptions peuvent se produire toutes les fois que les paramètres ont reçu des valeurs numériques telles que pour ces valeurs, ou bien les équations données deviennent dénuées de sens, ou bien les opérations que l'on a faites pour trouver les solutions x_0, y_0, z_0... deviennent elles-mêmes dénuées de sens.

Si l'on remarque cependant que a, b, c,... recevant des valeurs numériques qui tendent respectivement vers a_0, b_0, c_0,... les valeurs des expressions x_0, y_0, z_0,... tendent respectivement vers x'_0, y'_0, z'_0,... on est amené à dire que les équations données

admettent pour $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0 \ldots$, les systèmes de solutions x'_0, y'_0, $z'_0, \ldots$ et ceux-là seulement.

Exemples. — 1° L'équation

$$\frac{x}{a-2} - \frac{x}{a-1} = 2$$

admet la solution unique (nous le verrons plus loin)

$$x_0 \equiv 2(a-1)(a-2);$$

pour $a = 1$ on a $x'_0 = 0$ et l'équation donnée n'a pas de sens; on dit que, pour $a = 1$, elle admet la solution $x = 0$.

2° L'équation

$$a^2x = ax + 2$$

admet la solution unique

$$x_0 \equiv \frac{2}{a^2 - a};$$

pour $a = 1$, on a $x'_0 = \infty$ et d'autre part l'équation donnée devient $x = x + 2$ et n'a pas de racines. On dit que l'équation donnée a une racine infinie pour $a = 1$.

3° L'équation

$$ax + b^2 = bx + a^2$$

admet la solution unique

$$x_0 \equiv a + b;$$

pour $a = b = 1$, on a $x'_0 = 2$, et d'autre part l'équation donnée devient $x + 1 = x + 1$, et est vérifiée par un nombre quelconque.

On dit que l'équation donnée a la racine unique $x = 2$ pour $a = b = 1$.

Remarque. — Ce qui précède montre bien la différence qu'il faut faire entre une équation numérique *donnée* comme numérique, ou *dérivée* d'une équation littérale dans laquelle on a remplacé les paramètres par certaines valeurs numériques.

Au surplus, il ne faut pas oublier que c'est toujours en examinant ce qui se passe dans des cas très voisins, mais exempts de difficultés, que l'on arrive à étendre aux cas exceptionnels le langage et les règles ordinaires.

§ 2. — Principes relatifs à une équation.

97. — Deux équations renfermant les mêmes inconnues sont *équivalentes* lorsqu'elles admettent les mêmes systèmes de solutions.

Pour résoudre une équation donnée $P = Q$, on la remplace successivement par de nouvelles équations équivalentes d'une forme plus simple et plus commode.

Si l'on transforme une équation comme on transformerait une égalité d'après les règles du calcul des nombres algébriques et du calcul algébrique, on obtiendra en général une nouvelle équation équivalente à la première; dans tous les cas, si l'on a *perdu* des solutions, ou si l'on a introduit *des solutions étrangères*, il sera facile de connaître quelles sont ces solutions. En effet, une solution x_0, y_0, z_0,... de la première équation appartiendra à la seconde, si, quand les inconnues prennent les valeurs x_0, y_0, z_0,... les opérations que l'on a faites pour passer de la première équation à la seconde conservent un sens et demeurent légitimes; sinon, cette solution a pu être perdue. De même, une solution x_0, y_0, z_0,... de la seconde équation appartiendra à la première si, quand les inconnues prennent ces valeurs, les opérations que l'on doit faire pour passer de la seconde équation à la première conservent un sens et demeurent légitimes; sinon, cette solution peut être étrangère.

Il faut donc chercher les solutions perdues et les solutions étrangères introduites parmi les nombres ou les expressions qui, mis à la place des inconnues, ôtent leur sens aux opérations qui permettent de passer de la première équation à la seconde ou de la seconde à la première, ou qui cessent de rendre ces opérations légitimes.

Exemples. — Soit l'équation

$$x^3 - 5x = 4 - 3x^2;$$

on peut faire passer le terme $-3x^2$ dans le premier membre à condition de changer son signe et obtenir ainsi la nouvelle équation

$$x^3 - 5x + 3x^2 = 4$$

équivalente à la première, car on n'a perdu aucune solution, ni introduit aucune solution étrangère.

Soit l'équation

$$(x-1)(x-2)=0$$

qui a les seules solutions $x=1$ et $x=2$.

En multipliant ses deux membres par $x-3$, on a la nouvelle équation

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

qui admet la solution étrangère $x=3$, parce que, quand x prend la valeur 3, on ne peut passer de la seconde égalité à la première, puisque pour cela il faudrait diviser ses deux membres par le nombre nul $x-3$.

De même, en divisant les deux membres de l'équation donnée par $x-1$, on a la nouvelle équation

$$x-2=0,$$

et l'on a perdu la solution $x=1$.

En divisant les deux membres de l'équation

$$(x-1)^2(x-2)=0$$

par $x-1$, on ne perd aucune solution; mais on ne peut l'affirmer qu'après vérification directe.

De même, en multipliant les deux membres de l'équation

$$(x-1)(x-2)=0$$

par $x-1$, on n'introduit pas la racine étrangère $x=1$, comme on le voit après vérification directe.

98. — Puisque pour résoudre l'équation $P=Q$, il faut chercher les nombres ou les expressions qui annulent $P-Q$, il est clair qu'on obtient une équation équivalente à l'équation proposée en égalant à zéro une expression algébrique quelconque X, identique à $P-Q$.

Pratiquement, on fera passer tous les termes de l'équation dans un même membre, en changeant les signes de tous les termes que l'on transporte d'un membre dans un autre, et l'on obtiendra ainsi une équation équivalente à l'équation proposée et de la forme $X=0$.

Si la fonction X est entière et rationnelle, on réduira

ses termes semblables, et l'équation proposée se trouvera mise sous la forme la plus simple possible, celle d'un polynôme égalé à zéro.

Exemple. — L'équation

$$5x - 4 = 3x + 5$$

s'écrira sous les formes successives

$$5x - 4 - 3x - 5 = 0,$$
$$2x - 9 = 0.$$

Remarquons que le degré d'une équation entière et rationnelle par rapport à certaines inconnues, tel que nous l'avons défini au n° **94**, peut n'être qu'un degré apparent. Ainsi, l'équation

$$x^2 - 3x + 5 = 15 + x^2 + 3x$$

est en réalité du premier degré, quoique du second en apparence, parce que le terme x^2 commun aux deux membres peut être supprimé et que l'équation peut s'écrire :

$$6x + 10 = 0.$$

Pour évaluer avec certitude le degré d'une équation entière et rationnelle par rapport à certaines inconnues, il faut donc d'abord faire passer tous les termes dans un même membre et réduire les termes semblables.

99. — Revenons à l'équation $X = 0$. Le cas où X est une expression entière et rationnelle sera examiné plus loin. Si l'expression X n'est pas entière, elle peut se mettre sous la forme du quotient $\frac{Y}{Z}$ de deux expressions entières, rationnelles ou irrationnelles. Ces expressions, bien entendu, pourront être simplifiées autant que possible ainsi que leur rapport.

Pour résoudre l'équation $\frac{Y}{Z} = 0$, on multiplie ses deux membres par Z, ce qui donne la nouvelle équation équivalente en général $Y = 0$.

Il est clair que, de cette façon, on n'a pu perdre aucune solution, car Z, qui est une expression entière, prend toujours une valeur déterminée et finie quand les inconnues reçoivent des valeurs quelconques finies.

Mais, on a pu introduire des solutions étrangères, et ces solutions sont parmi celles qui vérifient l'équation $Z=0$, car dans ce cas seulement on ne peut passer de l'équation $Y=0$ à l'équation donnée $\frac{Y}{Z}=0$.

On résoudra donc l'équation $Y=0$; tout système de solutions x_0, y_0, z_0,... qui n'annulera pas Z sera un système de solutions de l'équation donnée; mais pour tout système de solutions de $Y=0$ annulant Z, il faudra chercher directement la valeur de $\frac{Y}{Z}$: si cette valeur est nulle ou indéterminée avec possibilité de devenir nulle, la solution considérée appartiendra à l'équation donnée; sinon, ce sera une solution étrangère.

Dans le cas où l'équation $Z=0$ est facile à résoudre, et c'est ce qui arrive le plus ordinairement, on pourra procéder autrement pour savoir si l'on a introduit des solutions étrangères et quelles sont ces solutions. Une solution de $Z=0$ qui annule Y est seule une solution étrangère possible : on reconnaîtra s'il en est ainsi réellement par un essai direct, comme précédemment.

Remplacer l'équation $\frac{Y}{Z}=0$ par l'équation $Y=0$, c'est ce qu'on appelle *chasser les dénominateurs* de l'équation donnée. Remarquons que pour faire cette opération, il n'est pas nécessaire de mettre explicitement l'équation donnée sous la forme $\frac{Y}{Z}=0$: il suffit de multiplier tous ses termes par une expression entière Z choisie de façon que la nouvelle équation obtenue soit entière.

Exemples. — Chasser les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{x}{x^2-16}+\frac{7}{4x}=\frac{2x^2-3}{4-x}+\frac{2-x^5}{3(x+4)}.$$

Il suffit de multiplier tous les termes par

$$Z \equiv 12x(x^2-16)$$

pour faire disparaître à la fois les dénominateurs littéraux et même les dénominateurs numériques.

On obtient ainsi la nouvelle équation

$$12x^2+21(x^2-16)=-12x(2x^2-3)(x+4) \\ +4(2-x^5)(x-4).$$

On a pu introduire comme solutions étrangères les solutions de $Z=0$, qui sont évidemment $x=0$, $x=4$, $x=-4$. Mais aucune de ces solutions n'est racine de la nouvelle équation : celle-ci est donc équivalente à l'équation proposée.

Soit encore à chasser les dénominateurs dans l'équation

$$\frac{x+2}{x^4-16}-\frac{1}{2(x^2-4)}+3=0.$$

En multipliant tous les termes par

$$Z \equiv 2(x^4-16),$$

on obtient l'équation

$$Y \equiv 2(x+2)-(x^2+4)+6(x^4-16)=0.$$

Les solutions étrangères annulant Z ne peuvent être que -2 et $+2$; la première de ces valeurs ne vérifie pas $Y=0$, mais la seconde vérifie $Y=0$: c'est une solution étrangère possible.

Pour reconnaître si $x=2$ est solution étrangère ou non, remarquons que l'on a

$$\frac{Y}{Z} \equiv \frac{6x^4-x^2+2x-96}{2(x^4-16)};$$

en divisant les deux termes par $x-2$, il vient

$$\frac{Y}{Z} \equiv \frac{6x^3+12x^2+23x+48}{2(x^3+2x^2+4x+8)},$$

de sorte que, pour $x = 2$, la valeur de $\frac{Y}{Z}$ est $\frac{95}{32}$; la solution $x = 2$ est donc étrangère.

Considérons enfin l'équation

$$\frac{x+2}{x^4-16} - \frac{1}{2(x^2-4)} + \frac{1}{32} = 0.$$

En multipliant tous les termes par

$$Z \equiv 32(x^4 - 16),$$

on obtient l'équation

$$Y \equiv 32(x+2) - 16(x^2+4) + (x^4 - 16) = 0.$$

La seule solution étrangère possible est $x = 2$ qui annule à la fois Z et Y. Or on a :

$$\frac{Y}{Z} \equiv \frac{x^4 - 16x^2 + 32x - 16}{32(x^4 - 16)} \equiv \frac{x^3 + 2x^2 - 12x + 8}{32(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)},$$

et par suite la valeur de $\frac{Y}{Z}$ pour $x = 2$ est 0. L'équation $Y = 0$ est donc équivalente à l'équation donnée.

100. — Nous venons de ramener la résolution d'une équation donnée quelconque à celle d'une équation entière $Y = 0$: s'il y a des solutions étrangères introduites, nous les connaissons.

Si l'expression Y est rationnelle, l'équation donnée est ramenée à sa forme la plus simple.

Examinons donc le cas où Y est irrationnelle, et de cette façon nous aurons épuisé tous les cas possibles.

On peut toujours multiplier Y par une expression entière Y' telle que le produit YY' soit entier et rationnel (**87**). C'est ce qu'on appelle *chasser les radicaux* dans l'équation $Y = 0$. En remplaçant l'équation $Y = 0$ par l'équation $YY' = 0$, on obtient une équation qui, outre les racines de $Y = 0$, admet celles de $Y' = 0$, et qui d'ailleurs n'a pas d'autres solutions à moins que ce ne soient des quantités ne donnant pas de sens à Y et Y'. En effet, pour des valeurs finies attribuées aux inconnues (et l'on ne peut leur en attribuer d'autres), Y et Y' étant des fonctions entières prennent des valeurs déterminées et finies : donc, pour que le produit YY' soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul, comme quand il s'agit de nombres algébriques ordinaires.

On résoudra donc l'équation $YY' = 0$, et l'on cherchera parmi ses solutions celles qui vérifient l'équation $Y = 0$, à l'aide d'essais directs; toutes les autres seront étrangères.

Exemple. — Soit l'équation

$$x - \sqrt{x-4} + \sqrt{(x-4)(x+1)} = 0.$$

On chasse le radical $\sqrt{x+1}$ en multipliant par

$$x - \sqrt{x-4} - \sqrt{(x-4)(x+1)};$$

il vient, après réduction :

$$2x\left(2 - \sqrt{x-4}\right) = 0.$$

Multipliant par $2 + \sqrt{x-4}$, il vient :

$$2x(8 - x) = 0,$$

ou en divisant par 2, et changeant les signes :

$$x(x-8) = 0.$$

La solution $x = 0$ est étrangère : pour $x = 0$ l'équation donnée n'a pas de sens. La solution $x = 8$ est aussi étrangère : elle convient à l'équation

$$x - \sqrt{x-4} - \sqrt{(x-4)(x+1)} = 0.$$

L'équation donnée n'a donc aucune solution.

Quand l'expression Y contient un seul radical d'indice n, $\sqrt[n]{A}$, on peut encore chasser ce radical en l'isolant dans l'un des membres de l'équation, puis en élevant les deux membres de l'équation ainsi obtenue, de la forme $Y' = \sqrt[n]{A}$, à la puissance n^{me}. Ce procédé ne diffère pas au fond du précédent, puisque l'on a l'identité

$$a^n - b^n \equiv (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

mais en l'appliquant, on peut dire, grâce aux règles de calcul relatives aux égalités : si n est impair, la nouvelle équation obtenue est équivalente à l'ancienne; si n est pair, toute solution de la nouvelle équation est solution de l'équation donnée si elle donne à Y' une valeur positive ou nulle; sinon, elle vérifie l'équation $Y' = -\sqrt[n]{A}$ (à moins encore qu'elle ne donne pas de sens à $\sqrt[n]{A}$).

Exemple. — Soit l'équation

$$2x + 4 - \sqrt{x+16} = 0.$$

On l'écrit sous la forme

$$2x + 4 = \sqrt{x+16};$$

élevant les deux membres au carré, il vient après réductions :

$$x(4x+15)=0.$$

La solution $x=0$ vérifie l'équation donnée, car $2x+4$ prend alors une valeur positive.

La solution $x=-\frac{15}{4}$ est étrangère et vérifie l'équation

$$2x+4=-\sqrt{x+16},$$

car $2x+4$ prend alors une valeur négative.

101. — Toute équation peut être mise, nous venons de le voir, sous forme entière et rationnelle $X=0$; cette nouvelle équation contient toutes les solutions de l'équation proposée, et dans certains cas des solutions étrangères, toujours faciles à reconnaître.

Il existe deux cas singuliers sur lesquels il est nécessaire de dire un mot :

1° Le polynôme X peut être identiquement nul. Dans ce cas l'équation $X=0$ est vérifiée par tout système de valeurs attribuées aux inconnues, mais il n'en est pas nécessairement de même de l'équation donnée : ceci dépendra des solutions étrangères introduites. En général, il sera facile de voir ce qu'il en est.

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{2x}{5}-\frac{7x}{10}+4=8+\frac{8x}{15}-\frac{5x}{6}-4.$$

Mettant cette équation sous la forme $X=0$, on trouve $X\equiv 0$; ici on n'a introduit aucune solution étrangère; l'équation proposée est vérifiée pour toute valeur attribuée à x.

Soit encore l'équation

$$x=\sqrt{x^2};$$

en élevant les deux membres au carré pour mettre l'équation sous forme entière et rationnelle, on trouve encore $X\equiv 0$; mais on a introduit les solutions de l'équation $x=-\sqrt{x^2}$: l'équation proposée est vérifiée pour toute valeur positive ou nulle attribuée à x.

2° Le polynôme X peut se réduire à une expression non identiquement nulle, mais indépendante des inconnues.

Alors, l'équation $X=0$ est *impossible*, c'est-à-dire n'admet aucune solution; comme dans le cours des transformations, on n'a perdu aucune solution (si l'on a eu soin de les faire comme nous avons indiqué, sans jamais supprimer de facteur commun à tous les termes d'une équation et renfermant les inconnues), il en est de même de l'équation proposée.

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{2x}{5} - \frac{7x}{10} + 3 = 8 + \frac{8x}{15} - \frac{5x}{6} + 9;$$

mettant cette équation sous la forme $X = 0$, on trouve $X = 14$. L'équation donnée est impossible.

Ces cas exceptionnels mis à part, le polynôme X dépendra des inconnues; si X ne renfermait que certaines des inconnues, on formerait les solutions de l'équation donnée en adjoignant aux solutions de $X = 0$ des valeurs arbitraires pour les inconnues qui ne figurent pas dans X, et prenant soin toutefois d'éviter les solutions étrangères.

§ 3. — Généralités sur les équations entières et rationnelles. Résolution de l'équation du premier degré à une inconnue.

102. — Nous avons ramené la résolution d'une équation à celle d'une équation $X = 0$, entière et rationnelle.

Si le polynôme X renferme plusieurs inconnues, on choisira spécialement l'une de ces inconnues, et l'on regardera les autres comme des paramètres pouvant recevoir des valeurs arbitraires. On formera alors les systèmes de solutions en résolvant l'équation à une seule inconnue ainsi obtenue.

Ainsi pour résoudre l'équation

$$x^2 + y^2 = 4,$$

on regardera y comme un paramètre, et on résoudra l'équation en x ainsi obtenue. Cette équation, qu'on peut écrire sous la forme

$$x^2 = 4 - y^2,$$

n'est possible que si la valeur absolue de y est au plus égale à 2, et admet alors les deux solutions $\sqrt{4 - y^2}$ et $-\sqrt{4 - y^2}$.

Les solutions de l'équation proposée sont donc obtenues en donnant à y une valeur arbitraire au plus égale à 2 en valeur absolue et en prenant $x = \pm\sqrt{4 - y^2}$.

103. — Nous sommes ainsi ramenés au cas d'une

équation $X=0$, à une seule inconnue, X étant un polynôme entier. La méthode générale pour résoudre une telle équation consiste à ramener cette résolution à celle d'équations plus simples.

Si l'on sait mettre le polynôme X sous la forme d'un produit de facteurs A, B, C,... qui sont eux-mêmes des polynômes, il est clair que les solutions de $X=0$ seront les diverses solutions distinctes des équations plus simples $A=0$, $B=0$, $C=0$... En effet, pour toute valeur finie attribuée à l'inconnue, les polynômes X, A, B, C,... prennent des valeurs déterminées et finies, et l'on peut appliquer cette proposition : pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

Exemple. — Soit l'équation

$$X \equiv x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0;$$

on voit aisément que l'on a :

$$X \equiv (x-1)(x^2-4) \equiv (x-1)(x-2)(x+2);$$

on est donc ramené à la résolution des équations

$$x-1=0, \qquad x-2=0, \qquad x+2=0,$$

dont les racines sont en évidence : les racines de l'équation proposée sont $x=1$, $x=2$, $x=-2$.

Soit encore l'équation

$$X \equiv x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0.$$

On a :

$$X \equiv (x+1)(x^2+4),$$

et l'on est ramené à la résolution des équations

$$x+1=0 \quad \text{et} \quad x^2+4=0;$$

la première a pour unique racine $x=-1$; la seconde n'a évidemment aucune racine, puisque le carré d'un nombre quelconque est positif; donc l'équation proposée a pour racine unique $x=-1$.

104. — Supposons que l'on connaisse une racine x_0 de l'équation $X=0$. Alors le polynôme X qui s'annule

pour $x = x_0$, est divisible par $x - x_0$; si X′ est le quotient, puisqu'on a $X \equiv (x - x_0)X'$, on voit qu'on est ramené à résoudre l'équation $X' = 0$, qui est plus simple.

Exemple. — L'équation

$$x^5 - x^3 + x^2 - x - 2 = 0$$

admet la racine $x = -1$. Pour trouver les autres racines, il suffit de résoudre l'équation que l'on obtient en divisant le premier membre par $x + 1$, c'est-à-dire

$$x^4 - x^3 + x - 2 = 0.$$

Remarque. — On voit avec quel soin il faut laisser en évidence les divers facteurs que l'on peut apercevoir communs aux différents termes d'une équation.

105. — L'équation la plus simple est l'équation du premier degré à une inconnue : elle est facile à résoudre.

L'équation du premier degré à une inconnue se présente sous la forme

$$ax + b = 0,$$

a et b étant des nombres ou bien des expressions algébriques dépendant de paramètres, suivant que l'équation est elle-même numérique ou littérale. Dans tous les cas, le coefficient a n'est pas nul. On peut diviser le premier membre par la quantité a qui est fixe et non nulle, et l'on obtient l'équation équivalente

$$x + \frac{b}{a} = 0,$$

ou encore
$$x = -\frac{b}{a},$$

qui a évidemment une racine et une seule, $-\frac{b}{a}$.

Exemple. — L'équation

$$3x - 3 + \frac{7}{2} = 2 - 6x + \frac{9}{5}$$

se met sous la forme équivalente

$$9x-\frac{33}{10}=0;$$

elle a une racine unique égale à $\frac{33}{90}$ ou $\frac{11}{30}$.

Si l'équation est littérale, il peut se faire que, pour certaines valeurs attribuées aux paramètres, l'expression a s'annule, ou bien que a et b n'aient pas de valeur numérique directement calculable. Dans tous les cas, d'après ce que nous avons convenu, nous dirons que pour ces valeurs l'équation $ax+b=0$ a une racine égale à la valeur numérique de $-\frac{b}{a}$ pour ces valeurs particulières des paramètres, si cette valeur existe, finie ou infinie; si $-\frac{b}{a}$ devient indéterminée, nous dirons que l'équation est vérifiée pour toute valeur attribuée à x $\left(\text{à condition que cette valeur soit parmi celles que peut prendre } -\frac{b}{a}\right)$.

Exemple. — Considérons l'équation

$$\frac{a-x}{b-x}=m,$$

déjà rencontrée au nº **51**, pour déterminer le point qui divise un segment dans un rapport donné.

En multipliant par $b-x$ et réduisant, on a l'équation équivalente

$$x(1-m)=a-bm;$$

on n'a pas introduit la solution étrangère $x=b$ qui ne vérifie pas cette dernière équation.

L'équation donnée a donc l'unique solution

$$x=\frac{a-bm}{1-m}.$$

Considérons a et b comme des nombres donnés distincts, et m comme un paramètre. Si $m=1$, $\frac{a-bm}{1-m}$ prend une valeur infinie : l'équation donnée a une racine infinie pour $m=1$. Si $m=\infty$, $\frac{a-bm}{1-m}$ prend la valeur b : l'équation donnée admet la racine b pour $m=\infty$.

Ces résultats sont conformes à ceux que l'on trouve par des considérations géométriques directes.

Nous rencontrerons ultérieurement bien d'autres exemples de faits analogues.

§ 4. — Principes relatifs à un système d'équations simultanées.

106. — Deux systèmes d'équations simultanées renfermant les mêmes inconnues sont dits *équivalents* lorsqu'ils admettent les mêmes systèmes de solutions.

Pour résoudre un système d'équations simultanées, on le remplace successivement par de nouveaux systèmes équivalents d'une forme plus simple et plus commode.

En transformant un système d'équations comme on transformerait un système d'égalités, on obtiendra en général un nouveau système équivalent au premier. Cependant il pourra y avoir des solutions perdues ou des solutions étrangères introduites : une discussion semblable à celle du n° **97** permettra de déterminer à l'avance ces solutions.

Voici les principales transformations que l'on peut faire subir avec avantage à un système d'équations simultanées, en prenant bien soin chaque fois de discuter les solutions perdues ou les solutions étrangères.

On peut transformer chacune des équations du système comme une équation isolée, et en particulier la mettre sous forme rationnelle et entière.

On peut ajouter ou retrancher plusieurs équations données membre à membre, ou encore les multiplier membre à membre, ou encore diviser deux équations membre à membre, etc.

On peut encore remplacer dans une ou plusieurs des équations données une expression algébrique dépendant des inconnues par une autre qui prend même valeur numérique pour *tout système de solutions*, en vertu même des équations données.

Soit un système d'équations entières et rationnelles

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=0, \ldots$$

et supposons que le polynôme X puisse se mettre sous la forme d'un produit de facteurs de même forme A, B, C,... Alors, il est clair comme au n° **103** que, pour résoudre le système proposé, on peut résoudre successivement les systèmes

$$\begin{array}{lll} A=0, & Y=0, & Z=0,\dots \\ B=0, & Y=0, & Z=0,\dots \\ C=0, & Y=0, & Z=0,\dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Comme application, remarquons que si l'on remplace le système

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,\dots$$

par le nouveau système

$$XX'+YY'+ZZ'+\dots=0, \quad Y=0, \quad Z=0,\dots$$

X, Y, Z,... X′, Y′, Z′,... étant des polynômes par rapport aux inconnues, ce nouveau système admettra toutes les solutions du premier, et en outre des solutions étrangères qui vérifieront le système

$$X'=0, \quad Y=0, \quad Z=0\dots$$

En effet le nouveau système considéré est équivalent à

$$XX'=0, \quad Y=0, \quad Z=0,\dots$$

puisque, pour tout système de solutions, les expressions Y, Z,... prennent une valeur nulle.

Cette transformation est souvent employée, surtout dans le cas où X′ ne dépend pas des inconnues ; alors le nouveau système est équivalent au premier.

107. — Pour résoudre un système d'équations simultanées, il est convenable de le mettre d'abord sous forme d'équations entières et rationnelles, $X=0$, $Y=0$, $Z=0$,... en profitant de toutes les simplifications que l'on peut apercevoir.

Ensuite on *élimine* une des inconnues, x par exemple, c'est-à-dire qu'on ramène la résolution du système à celle d'un système de la forme suivante :

$$x=x_0, \quad Y'=0, \quad Z'=0,\dots$$

x_0 étant une expression qui dépend des inconnues y, z,... autres que x, et Y′, Z′,... étant des expressions qui ne dépendent que des inconnues y, z...

Cette élimination est facile si l'équation $X=0$ est du premier degré par rapport à x; en effet, en la résolvant on la met immédiatement sous la forme $x=x_0$, et il suffit alors de remplacer x par x_0 dans les équations $Y=0$, $Z=0$,... pour obtenir les équations $Y'=0$, $Z'=0$...

Exemple. — Eliminer x entre les équations

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$$

de la première on tire $x=5-y$, et portant dans la seconde, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x=5-y, \\ y(5-y)=6. \end{cases}$$

Il est encore facile d'éliminer x quand on sait résoudre l'équation $X=0$ considérée comme renfermant la seule inconnue x; si en effet x_0, x'_0, x''_0,... sont ses diverses solutions, le système proposé peut évidemment être remplacé par l'ensemble des divers systèmes

$$\begin{array}{lll} x=x_0, & Y=0, & Z=0,\ldots \\ x=x'_0, & Y=0, & Z=0,\ldots \\ x=x''_0, & Y=0, & Z=0,\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

puisque X ne peut s'annuler que si l'on a $x=x_0$, ou $x=x'_0$...; et chacun de ces systèmes est de la forme précédemment examinée.

Exemple. — Eliminer x entre les équations

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x^2+xy-5x-4y+3=0. \end{cases}$$

La première donne $x=y$ et $x=-y$; on a donc les deux systèmes

$$\begin{cases} x=y, \\ x^2+xy-5x-4y+3=0, \end{cases} \text{et} \begin{cases} x=-y, \\ x^2+xy-5x-4y+3=0, \end{cases}$$

ou, en éliminant x dans chacun d'eux,

$$\begin{cases} x = y, \\ 2y^2 - 9y + 3 = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -y, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$$

Dans les autres cas, l'élimination de l'inconnue x est un problème plus difficile; nous allons faire comprendre seulement par un exemple simple comment on peut y arriver.

Soit à éliminer x entre les équations

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2y + y^3 = 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 - 3y^3 = 0. \end{cases}$$

Multipliant la première par 3 et ajoutant avec la seconde membre à membre, on a le système équivalent

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2y + y^3 = 0, \\ x^4 + 3x^3 + 2x^2y^2 - 15x^2y = 0, \end{cases}$$

qui peut se remplacer par les deux systèmes

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2y + y^3 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^3 - 5x^2y + y^3 = 0, \\ x^2 + 3x + 2y^2 - 15y = 0. \end{cases}$$

Le premier, par élimination de x, conduit à

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Examinons le second. Multipliant la seconde équation par x et retranchant de la première membre à membre, on a le système équivalent

$$\begin{cases} -(5y + 3)x^2 + (15y - 2y^2)x + y^3 = 0, \\ x^2 + 3x + 2y^2 - 15y = 0. \end{cases}$$

Multipliant encore la seconde par $5y + 3$ et ajoutant membre à membre avec la première, on a le système équivalent

$$\begin{cases} (-2y^2 + 30y + 9)x + 11y^3 - 69y^2 - 45y = 0, \\ x^2 + 3x + 2y^2 - 15y = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \dfrac{11y^3 - 69y^2 - 45y}{2y^2 - 30y - 9}, \\ \left(\dfrac{11y^3 - 69y^2 - 45y}{2y^2 - 30y - 9}\right)^2 + 3\dfrac{11y^3 - 69y^2 - 45y}{2y^2 - 30y - 9} + 2y^2 - 15y = 0. \end{cases}$$

L'élimination de x est réalisée.

Nous n'insisterons pas davantage sur l'élimination en général, dont nous n'aurons pas besoin par la suite.

108. — Par l'élimination d'une inconnue, on voit que l'on remplace le problème de la résolution d'un certain nombre d'équations renfermant un certain nombre d'inconnues par celui de la résolution d'un nombre moindre d'équations renfermant moins d'inconnues. En effet il suffit de savoir résoudre les équations

$$Y' = 0,\ Z' = 0, \ldots$$

En général, le nombre des équations diminue d'une unité ainsi que celui des inconnues; mais, dans certains cas particuliers, le nombre des équations peut diminuer de plus d'une unité ainsi que le nombre des inconnues.

Il est donc clair qu'en éliminant successivement plusieurs inconnues on arrivera finalement :

ou bien à des équations de la forme $0 = 0$ qui sont vérifiées quelles que soient les valeurs des inconnues qui devraient y figurer;

ou bien à des équations dont l'une au moins est de la forme $a = 0$, a étant un nombre non nul ou une expression dépendant des paramètres non nulle; cette équation étant impossible, le système est lui-même impossible : d'ailleurs, en général, un système d'équations simultanées est impossible dès que l'une des équations est elle-même impossible;

ou bien à une équation proprement dite renfermant une ou plusieurs inconnues, et dont la résolution conduira à celle du système.

En général, on sera dans le second cas, si le nombre des équations données est supérieur à celui des inconnues, car alors on peut éliminer toutes les inconnues.

En général aussi, on arrivera finalement à une équation à une seule inconnue si le nombre des équations données est égal à celui des inconnues, et à une équation à p inconnues, si le nombre des équations données dépasse de p le nombre des inconnues.

Pour faciliter le langage, nous dirons d'un système d'équations, qu'il est *impossible*, *déterminé* ou *indéterminé*, suivant qu'il n'admet pas de solutions, qu'il en

admet un nombre fini, ou un nombre infini. On dira de même en parlant d'une seule équation.

Suivant que le nombre des équations est supérieur, égal ou inférieur au nombre des inconnues, il y a en général impossibilité, détermination ou indétermination.

Quand il y a indétermination, cela ne veut pas dire que toutes les inconnues peuvent recevoir des valeurs arbitraires; en général certaines d'entre elles sont dans ce cas, et les autres sont alors déterminées par les premières.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations presque intuitives, et qui seront suffisamment mises en évidence par la suite. Remarquons seulement que ce sont les systèmes dans lesquels les inconnues sont en nombre égal à celui des équations qui offrent le plus grand intérêt. Enfin, répétons qu'il faut prendre les plus grandes précautions pour éviter de perdre des solutions ou d'introduire des solutions étrangères.

109. — Un procédé de résolution d'un système d'équations ou d'une équation est encore à signaler et à rapprocher de ce qui précède; c'est celui qui consiste à choisir des *inconnues auxiliaires*, lorsque par là on amène des simplifications. En réalité ceci revient à introduire de nouvelles inconnues et de nouvelles équations exprimant les relations entre les nouvelles et les anciennes inconnues.

Exemple. — Soit le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}&=5,\\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}&=6;\end{aligned}\right.$$

prenons comme inconnues auxiliaires $x'=\frac{1}{x}$ et $y'=\frac{1}{y}$, on a les équations plus simples

$$\left\{\begin{aligned} 2x'+3y'&=5,\\ 4x'-5y'&=6.\end{aligned}\right.$$

En réalité, on a éliminé x et y entre les équations du nouveau système

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5, & x'=\frac{1}{x}, \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=6, & y'=\frac{1}{y}. \end{array}\right.$$

Remarquons que de cette façon on peut perdre certaines solutions toujours faciles à reconnaître : ainsi dans l'exemple considéré on perd la solution $x=0$, $y=0$ qui appartient aux équations données et que l'on ne peut retrouver, puisque x' et y' ne peuvent pas prendre de valeurs infinies.

§ 5. — Principes relatifs aux inégalités.

110. — Si A et B sont deux expressions algébriques dépendant d'inconnues x, y, z,... et de paramètres a, b, c..., on peut chercher quelles sont les valeurs des inconnues qui rendent la valeur de la première plus grande ou plus petite que celle de la seconde. C'est ce qu'on appelle résoudre l'inégalité

$$A > B \quad \text{ou} \quad A < B.$$

Les considérations du § 1er peuvent se répéter presque mot pour mot quand il s'agit d'inégalités : les modifications à faire sont évidentes.

Il en est de même des considérations relatives à l'équivalence.

D'une façon générale, on raisonnera sur les inégalités à résoudre comme sur les inégalités numériques.

Donc, en particulier, toute inégalité $A > B$ peut être ramenée d'abord à la forme $X > 0$.

Si X est une expression entière et rationnelle, on gardera l'inégalité sous cette forme, la plus simple possible.

Si X est une expression fractionnaire de la forme $\frac{Y}{Z}$, on

peut toujours supposer que Z est un produit de facteurs entiers, les uns toujours positifs A, B, C,... les autres dont on ne connaît pas le signe, A′, B′, C′,...; alors on peut remplacer l'inégalité $\frac{Y}{Z} > 0$ par l'inégalité

$$Y.\,A'.\,B'.\,C'\ldots > 0;$$

en effet ceci revient à multiplier les deux membres de l'inégalité $\frac{Y}{Z} > 0$ par la quantité *positive* $ABC\ldots A'^2B'^2C'^2\ldots$ C'est ce qu'on appelle chasser les dénominateurs dans l'inégalité donnée.

Exemple. — Pour chasser les dénominateurs dans l'inégalité

$$\frac{1}{x+1} > 3 + \frac{2}{(x+2)^2},$$

on multipliera ses deux membres par $(x+1)^2(x+2)^2$ et l'on obtiendra l'inégalité équivalente

$$(x+1)(x+2)^2 > 3(x+1)^2(x+2)^2 + 2(x+1)^2.$$

Plus généralement, on se souviendra qu'on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une égalité par une quantité *positive* sans changer son sens, ou par une quantité négative, à condition de changer son sens.

Envisageons maintenant une inégalité $X > 0$ dont le premier membre est entier et irrationnel. On peut multiplier X par une quantité X′ telle que le produit XX′ soit entier et rationnel; alors d'après ce que nous venons de rappeler, on résoudra les deux inégalités $XX' > 0$ et $XX' < 0$, et l'on prendra les solutions de la première qui donnent à X′ une valeur positive et les solutions de la seconde qui donnent à X′ une valeur négative.

Plus simplement, on peut chasser un radical d'indice n en isolant ce radical dans l'un des membres de l'inégalité, qui prend alors la forme $A > B$, et élevant les deux membres de cette inégalité à la puissance n. Si n est impair, l'inégalité $A^n > B^n$ est équivalente à la proposée;

si n est pair, on résoudra les deux inégalités $A^n > B^n$ et $A^n < B^n$, et l'on prendra les solutions de la première qui donnent à A une valeur positive et les solutions de la seconde qui donnent à B une valeur négative (47, 5°).

Exemple. — Soit l'inégalité

$$\frac{x-3}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}};$$

élevant les deux membres au carré, on est amené aux deux inégalités

$$\frac{(x-3)^2}{x^2+9} > \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \frac{(x-3)^2}{x^2+9} < \frac{(x-1)^2}{x^2+1},$$

ou en multipliant par la quantité *positive* $(x^2+1)(x^2+9)$ et réduisant

$$-4x(x^2-3) > 0 \quad \text{et} \quad -4x(x^2-3) < 0,$$

ou encore :

$$-x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \text{ et } -x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 0.$$

Les solutions de la première sont évidemment

$$x < -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 0 < x < \sqrt{3};$$

celles de la seconde sont

$$-\sqrt{3} < x < 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} < x.$$

Celles de la première rendent toutes $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+9}}$ négatif, et par suite sont à rejeter.

Celles de la seconde rendent $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ négatif seulement si l'on a $-\sqrt{3} < x < 0$: ce sont donc là les seules solutions de l'inégalité proposée.

111. — Pour résoudre une inégalité entière et rationnelle $X > 0$, on choisira une inconnue x, et l'on décomposera X en facteurs de signes constants ou du premier

degré par rapport à X, et il est clair que, pour cela, il faut savoir résoudre l'équation $X = 0$ par rapport à x. Alors, en divisant par le produit des facteurs de signe constant, on est ramené à une inégalité de la forme

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots(x-k)(x-l) \gtrless 0,$$

suivant les cas, où l'on peut supposer les quantités a, b, c, d,... k, l rangées par ordre de grandeur décroissante.

Si maintenant on remarque qu'un produit de plusieurs facteurs est positif ou négatif suivant qu'il renferme un nombre pair ou impair de facteurs négatifs, et aussi qu'un facteur tel que $x-a$ est positif ou négatif suivant que x est supérieur ou inférieur à a, on voit que l'inégalité

$$(x-a)(x-b)\dots(x-l) > 0$$

est vérifiée quand l'on a :

$$x > a, \quad \text{ou bien} \quad b > x > c,\dots$$

et que l'inégalité contraire

$$(x-a)(x-b)\dots(x-l) < 0$$

est vérifiée quand l'on a :

$$a > x > b, \quad \text{ou bien} \quad c > x > d\dots$$

Nous avons déjà appliqué cette règle intuitive dans l'un des exemples précédents.

Voici encore un autre exemple.

Soit à résoudre l'inégalité

$$\frac{2-x}{x+3} > 2;$$

on obtient successivement les inégalités équivalentes

$$(2-x)(x+3) > 2(x+3)^2,$$
$$-(x+3)(3x+4) > 0,$$
$$(x+3)\left(x+\frac{4}{3}\right) < 0,$$

et par suite les solutions sont données par la condition

$$-\frac{4}{3} > x > -3.$$

112. — On peut résoudre plusieurs inégalités simultanées en résolvant chacune d'elles et prenant leurs solutions communes.

Exemple. — Soit à résoudre les deux inégalités simultanées

$$\begin{cases} 2x - 3y > 4, \\ 4x + 5y > 20. \end{cases}$$

La première donne

$$x > \frac{3y+4}{2},$$

et la seconde

$$x > \frac{20-5y}{4}.$$

Si x_1 et x_2 sont ces deux limites, il faut donc que x soit supérieure à la plus grande des deux.

On aura $x_1 > x_2$ si l'on a :

$$\frac{3y+4}{2} > \frac{20-5y}{4},$$

ou bien

$$11y > 12 \quad \text{ou bien} \quad y > \frac{12}{11}.$$

On a de même $x_1 < x_2$ si l'on a $y < \frac{12}{11}$.

Donc les inégalités proposées sont vérifiées par

$$y > \frac{12}{11} \quad \text{et} \quad x > \frac{3y+4}{2},$$

et aussi par

$$< \frac{12}{11} \quad \text{et} \quad x > \frac{20-5y}{4}.$$

113. — On a souvent à chercher les valeurs de cer-

taines inconnues qui vérifient des relations de la forme

$$A \geqslant B.$$

Dans ce cas, il faut résoudre à la fois l'équation $A = B$ et l'inégalité $A > B$.

Par exemple si l'on doit avoir :

$$\frac{2 - x}{x + 3} \geqslant 2,$$

en profitant de ce que nous avons dit plus haut, on voit que les solutions seront données par les conditions

$$-\frac{4}{3} \geqslant x \geqslant -3.$$

On pourrait de même considérer des systèmes mixtes composés d'équations et d'inégalités. Il serait facile de raisonner sur de tels systèmes.

Exercices

I. — Ramener à la forme $X = 0$, X étant un polynôme entier, les équations suivantes, et discuter chaque fois les solutions étrangères introduites :

1. — $$\frac{5x - 3}{17} + \frac{3 - 4x}{2x - 5} = 3 - \frac{1}{3}\frac{x + 7}{x - 2}.$$

2. — $$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} + \frac{x - \frac{3}{5}}{\frac{3}{7}x - 4} = \frac{2}{x} - \frac{7}{11}.$$

3. — $$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} = 0.$$

4. — $$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{9}{2 - x} + \frac{28}{x - 3}.$$

5. — $$\frac{x^3 + x^2 + 1}{11x^2 - 7x - 18} = x^2 + 6 + \frac{7x}{x + 1} - \frac{3x^2}{x + 5}.$$

6. — $$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - a - b} = 0.$$

7. — $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{1+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{5}.$$

8. — $$\sqrt[3]{x^2+3x}=\frac{2}{3}-\frac{4}{x+\sqrt{x-3}}.$$

9. — $$\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=10.$$

10. — $$\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x-a}}+\frac{1}{\sqrt{x-b}}=0.$$

II. — **Résoudre les équations suivantes :**

11. — $$27x-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}-\frac{7}{6}x+15.$$

12. $$\frac{3}{4}(x-1)-\frac{5}{3}(2-4x)=\frac{1}{2}(3+x)+\frac{7}{12}(8-5x).$$

13. $$36x^2-\frac{9}{5}(x+4)=\frac{7}{5}x^2+\frac{3}{10}\left(\frac{5}{7}x^2+x-24.\right)$$

14. — $$(x+1)(x+2)=(x-1)(x-2).$$

15. — $$(x+3)(x+5)=4(x+1)^2.$$

16. $$(x+1)(x+2)(x+3)+(x-1)(x-2)(x-3)=0.$$

17. $$(x-3)(x+4)(x-5)+(x+3)(x-4)(x+5)=0.$$

18. $$(x+2)(x+7)(x-5)=(x+9)(x+3)(x-8).$$

19. — $$(x-a)(x-b)=2x^2-ax-bx.$$

20. — $$\frac{5x-3}{17}+\frac{4x-5}{2x+6}=2-\frac{103}{102}.$$

21. — $$\frac{a}{b+x}-\frac{a}{x-b}=2ab.$$

22. — $$2+x-\sqrt{25x+x^2}=-4+5x.$$

23 — $$\sqrt{36+x}=2\sqrt{5+x}-\sqrt{x}.$$

24. — $$\sqrt{36+x}=2\sqrt{5+x}+\sqrt{x}.$$

25. — $$2(x-1)(x^2+1)=2x^3-2.$$

26. — $$\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}+\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}=9.$$

27. — $$\sqrt[3]{x^3+9x^2}=3+x.$$

28. — $(x^2 - 4)(x^2 - 3)(x^2 + 7) = 0.$

29. $\sqrt{1 + x + \sqrt{1 + 2x}} + \sqrt{1 + x - \sqrt{1 + 2x}} = \sqrt{2 + 4x}.$

30. $\sqrt{1 + x + \sqrt{1 + 2x}} - \sqrt{1 + x - \sqrt{1 + 2x}} = \sqrt{2 + 4x}.$

III. — Résoudre les inégalités suivantes :

31. — $3x - 17 > 5 + 7x.$

32. — $\dfrac{2 - x}{3 + x} > 3.$

33. — $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 - 9)(x^2 + 8)} > 0.$

34. — $\dfrac{x^2 + 5x + 9}{x^2 - 1} > 1.$

35. — $3 - \sqrt{x^2 - 9} > 2 - x.$

36. — $14 + \sqrt[3]{x^3 - 42x^2} > x.$

37. $2x - 5y + 4 > 0$ et $3x + 4y - 5 < 0.$

38. — $x^2 + y^2 - 4 > 0.$

39. — $\sqrt{\dfrac{x - 5}{x + 5}} + \sqrt{\dfrac{x + 5}{x - 5}} > 9.$

40. — $x^2 + y^2 - 9 > 0$ et $x - y + 2 < 0.$

CHAPITRE II

RÉSOLUTION DE PLUSIEURS ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

§ 1er. — Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

114. — Deux équations du premier degré à deux inconnues se présentent sous la forme

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Si ces équations sont *données*, les deux inconnues y figureront, une au moins dans chaque. Si ces équations proviennent après transformation d'autres équations données, il peut se présenter des cas singuliers.

1° L'une des équations est de la forme $c = 0$, c étant une quantité non nulle; alors le système des équations données est impossible.

2° Le cas précédent exclu, l'une des équations données est de la forme $0 = 0$; alors on est ramené à la résolution de l'autre, et le système est indéterminé. Si cette autre est elle-même de la forme $0 = 0$, x et y peuvent recevoir toutes deux des valeurs arbitraires; si la seconde équation renferme une seule des inconnues, x par exemple, x est déterminée et y arbitraire; si la seconde équation renferme les deux inconnues, l'une d'elles peut recevoir une valeur arbitraire, et l'autre est déterminée par la première.

3° Les cas précédents exclus, l'une des inconnues, y par exemple, ne figure pas dans les équations qui prennent la forme

$$\begin{cases} ax + c = 0, \\ a'x + c' = 0, \end{cases}$$

a et a' n'étant pas des quantités nulles.

Ces équations sont vérifiées l'une par $x = -\frac{c}{a}$, l'autre par $x = -\frac{c'}{a'}$; si donc on n'a pas $-\frac{c}{a} = -\frac{c'}{a'}$ ou $ac' - a'c = 0$, il y a impossibilité; si, au contraire, on a $ac' - a'c = 0$, il y a indétermination : x a la valeur $-\frac{c}{a}$, et y a une valeur arbitraire.

115. — Revenons au cas général, et supposons que les deux inconnues figurent dans les deux équations

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$$

une au moins dans chaque.

Un tel système est facile à résoudre, car l'élimination d'une inconnue est ici chose aisée.

En supposant a non nul, ce qu'on peut toujours faire, puisque les deux coefficients de x ne sont pas nuls en même temps, la première équation donne

$$x = -\frac{by+c}{a},$$

et portant cette valeur dans la seconde, on a le système équivalent au système donné

$$\left\{\begin{aligned} &x = -\frac{by+c}{a}, \\ &-a'\frac{by+c}{a} + b'y + c' = 0. \end{aligned}\right.$$

La seconde équation s'écrit en multipliant par a, qui n'est pas une quantité nulle,

$$(ab' - ba')y + ac' - ca' = 0.$$

Si $ab' - ba'$ est nul sans que $ac' - ca'$ le soit, cette équation est impossible, et il en est de même du système donné.

Si $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$ sont nuls tous deux, cette équation est vérifiée quelle que soit la valeur attribuée à y. Le système est indéterminé : y est arbitraire et x est déterminé par la formule

$$x = -\frac{by+c}{a}.$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, l'équation

$$(ab' - ba')y + ac' - ca' = 0$$

admet une racine et une seule

$$y = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

de sorte que le système donné est équivalent à celui-ci :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{by+c}{a}, \\ y = -\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}, \end{cases}$$

ou en remplaçant y par sa valeur dans la première équation et réduisant

$$\begin{cases} x = \dfrac{bc'-cb'}{ab'-ba'}, \\ y = -\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \end{cases}$$

Le système donné a donc une seule solution fournie par les formules précédentes, faciles à retenir.

On arrive au même résultat en éliminant x de la façon suivante : multiplions la première équation par $-a'$, la seconde par a, et ajoutons membre à membre ; nous obtenons la nouvelle équation

$$(ab'-ba')y + ac' - ca' = 0,$$

qui peut remplacer la seconde des équations données, puisque a est une quantité non nulle indépendante des inconnues.

On est donc ramené au système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ (ab'-ba')y + (ac'-ca') = 0, \end{cases}$$

qui se discutera et se résoudra comme précédemment.

Remarques. — Si a' n'est pas nul, on peut éliminer x en tirant sa valeur de la seconde équation ; on a les mêmes résultats.

On peut aussi commencer par éliminer y ; on obtient encore les mêmes résultats, car si $ab' - ba'$ est nul, on a, en supposant a non nul, $b' = \dfrac{ba'}{a}$, et par suite $bc' - cb' = \dfrac{b}{a}(ac' - ca')$; or b n'est pas nul, sans quoi b' le serait

aussi et y ne figurerait pas dans les équations, ce qui est contraire à notre hypothèse; donc les quantités $bc' - cb'$ et $ac' - ca'$ sont nulles ou non nulles en même temps.

116. — Exemples :

1° Résoudre les équations

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x+y)-\frac{3}{4}=x-y-\frac{1}{3}(x-5y), \\ 2x+3y=4. \end{cases}$$

La première équation, réduite, prend la forme $-\frac{3}{4}=0$: le système est impossible.

2° Résoudre les équations

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x+y)=x-y-\frac{1}{3}(x-5y), \\ x+2y-4=0. \end{cases}$$

La première équation prend la forme $0=0$; il y a indétermination. On peut prendre y arbitrairement et l'on a :

$$x=4-2y.$$

3° Résoudre les équations

$$\begin{cases} 2x-5y+9=0, \\ 3x+4y-7=0. \end{cases}$$

L'application des formules, ou la répétition du raisonnement conduit aux valeurs

$$\begin{cases} x=\frac{-1}{23}, \\ y=\frac{41}{23}. \end{cases}$$

4° Résoudre les équations

$$\begin{cases} 12x-15y+9=0, \\ -8x+10y+3=0. \end{cases}$$

Si l'on veut appliquer les formules, ou si l'on répète le raisonnement, on voit qu'ici $ab' - ba'$ est nul. a n'étant

pas nul, on considère $ac' - ca'$, quantité dont la valeur est 108. Il y a donc impossibilité.

5° Résoudre les équations

$$\begin{cases} 12x - 15y + 9 = 0, \\ -8x + 10y - 6 = 0. \end{cases}$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on voit qu'il y a indétermination. Il suffit de résoudre l'équation

$$12x - 15y + 9 = 0,$$

et par suite on peut prendre y arbitrairement, avec

$$x = \frac{5y - 3}{4}.$$

117. — Si les coefficients a, b, c, a', b', c' sont littéraux, les équations données ont en général une solution et une seule fournie par les formules

$$x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \qquad y = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Si les paramètres reçoivent des valeurs telles que $ab' - ba'$ s'annule, ou que les expressions a, b, c, a', b', c' n'aient pas de valeurs numériques directement calculables, on dira, d'après ce que nous avons convenu, que pour ces valeurs des paramètres, les équations admettent pour solutions les valeurs finies ou infinies, déterminées ou indéterminées que prennent alors les expressions

$$\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \quad \text{et} \quad -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Toutefois, si les inconnues deviennent toutes deux indéterminées, leurs valeurs restent liées par toute relation continuant à exister entre elles.

Nous verrons plus loin des exemples de ces divers faits.

§ 2. — Résolution de n équations du premier degré à n inconnues.

118. — Pour résoudre un système de n équations du premier degré à n inconnues, on élimine une des inconnues en tirant sa valeur de l'une des équations et la portant dans les autres ; celles-ci restent manifestement du premier

degré, et l'on est ramené à résoudre un système de $n-1$ équations du premier degré à $n-1$ inconnues.

On continuera de la même façon et on arrivera finalement en général à une seule équation à une inconnue, dont la résolution permettra de trouver la solution du système. En général, le système admettra une solution et une seule; mais des cas particuliers pourront se présenter que l'on discutera comme nous avons fait dans le paragraphe précédent.

Nous allons nous contenter de quelques exemples.

1° Résoudre les équations

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-z-4=0, \\ 5x-y+2z-9=0, \\ 2x-y+z-3=0. \end{array}\right.$$

Eliminons z en tirant sa valeur de la première équation; on a le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{l} z=3x+2y-4, \\ 11x+3y-17=0, \\ 5x+y-7=0. \end{array}\right.$$

Eliminons y entre les deux dernières équations, en tirant sa valeur de la dernière; on a le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{l} z=3x+2y-4, \\ y=7-5x, \\ -4x+4=0. \end{array}\right.$$

La dernière équation donnant $x=1$, on trouve successivement $y=2$ et $z=3$.

2° Résoudre les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t-1=0, \\ 2x+3y+4z+5t-7=0, \\ x+2y+3z+4t-9=0, \\ 2x-5y+3z-9t+8=0. \end{array}\right.$$

Tirant la valeur de t de la première, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} t=1-x-y-z, \\ 3x+2y+z+2=0, \\ 3x+2y+z+5=0, \\ 11x+4y+12z-1=0. \end{array}\right.$$

Tirant z de la seconde, il vient :

$$\begin{cases} t = 1 - x - y - z, \\ z = -3x - 2y - 2, \\ \quad 3 = 0, \\ \quad » \end{cases}$$

Il est inutile de continuer; le système est impossible puisque l'on rencontre l'équation $3 = 0$.

3° Résoudre les trois équations

$$\begin{cases} -3x + 4y - 5z + 2 = 0, \\ 7x - 3y + 9z - 4 = 0, \\ 4x + y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

Tirant z de la première, il vient :

$$\begin{cases} z = \dfrac{-3x + 4y + 2}{5}, \\ 8x + 21y - 2 = 0, \\ 8x + 21y - 2 = 0. \end{cases}$$

On est ramené à l'unique équation

$$8x + 21y - 2 = 0.$$

On peut donc choisir x arbitrairement; on a alors :

$$y = \frac{2 - 8x}{21},$$

et par suite

$$z = \frac{10 - 19x}{21}.$$

Il y a indétermination.

§ 3. — Résolution de quelques systèmes particuliers.

119. — Dans ce qui précède, nous avons indiqué une méthode régulière pour résoudre les systèmes d'équations considérés. Mais il est clair que l'on peut profiter de toutes les circonstances favorables que l'on aperçoit pour abréger la résolution.

Nous allons le montrer par quelques exemples.

1° Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ ax+by+cz-d=0, \\ a^2x+b^2y+c^2z-d^2=0. \end{cases}$$

Tirons la valeur de z de la première équation ; il vient :

$$\begin{cases} z=1-x-y, \\ (a-c)x+(b-c)z+c-d=0, \\ (a^2-c^2)x+(b^2-c^2)z+c^2-d^2=0. \end{cases}$$

Des deux dernières, tirons x en appliquant les formules du n° **116** ; il vient :

$$x=\frac{(b-c)(c^2-d^2)-(c-d)(b^2-c^2)}{(a-c)(b^2-c^2)-(b-c)(a^2-c^2)}.$$

On peut simplifier en divisant haut et bas par $b-c$, et il vient :

$$x=\frac{(c^2-d^2)-(c-d)(b+c)}{(a-c)(b+c)-(a^2-c^2)}=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}.$$

Pour obtenir les valeurs des autres inconnues, au lieu de les calculer directement, remarquons que les équations ne changent pas si l'on change x en y et a en b; on aura donc la valeur de y en changeant a en b dans la formule précédente, ce qui donne

$$y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}.$$

De même, on obtiendra

$$z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

On s'assurera qu'on n'a pas commis d'erreur en constatant que l'une au moins des équations données est vérifiée en y remplaçant x, y, z par les valeurs trouvées; c'est une précaution qu'il faut toujours prendre.

2° Résoudre les équations

$$\left\{\begin{aligned} x+y-3z+6&=0,\\ 3x+3y-4z+7&=0,\\ 4x-4y+8z-9&=0.\end{aligned}\right.$$

En multipliant la première par 3, puis retranchant de la seconde membre à membre, il vient :

$$5z-11=0,$$

d'où

$$z=\frac{11}{5}.$$

Par suite on a :

$$\left\{\begin{aligned} x+y-\frac{3}{5}&=0,\\ 4x-4y+\frac{43}{5}&=0.\end{aligned}\right.$$

Multipliant la première par 4, et ajoutant et retranchant successivement la seconde, on a :

$$8x+\frac{31}{5}=0 \quad \text{et} \quad 8y-11=0,$$

d'où

$$x=-\frac{31}{40}, \qquad y=\frac{11}{8}.$$

Le système proposé est complètement résolu.

3° Résoudre les équations

$$\left\{\begin{aligned} x+y-z&=a,\\ x-y+z&=b,\\ -x+y+z&=c.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$x+y+z=a+b+c.$$

Retranchant maintenant de celle-ci chacune des proposées, on a successivement :

$$z=\frac{b+c}{2},\ y=\frac{a+c}{2},\ x=\frac{a+b}{2}.$$

4° Résoudre les équations

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x+y+t=b, \\ x+z+t=c, \\ y+z+t=d. \end{cases}$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$x+y+z+t=\frac{a+b+c+d}{3};$$

d'où comme plus haut, en retranchant de celle-ci chacune des proposées :

$$t=\frac{b+c+d-2a}{3}, z=\frac{a+c+d-2b}{3},$$

$$y=\frac{a+b+d-2c}{3}, x=\frac{a+b+c-2d}{3}.$$

5° Résoudre les équations

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt+e=0, \\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{t}{q}. \end{cases}$$

Prenons pour inconnue auxiliaire la valeur u des rapports $\frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \ldots$ On a alors :

$$x=mu, y=nu, z=pu, t=qu,$$

et portant ces valeurs dans la première équation, il vient :

$$(am+bn+cp+dt)u+e=0,$$

d'où

$$u=-\frac{e}{am+bn+cp+dt},$$

et par suite

$$x=-\frac{me}{am+bn+cp+dt}, y=-\frac{ne}{am+bn+cp+dt}, \text{etc.}$$

6° Résoudre le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{xy}{x+y}=a,\\ &\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b.\end{aligned}\right.$$

La première s'écrit :

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{a},$$

ou

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a};$$

alors, prenant pour inconnues auxiliaires $x'=\frac{1}{x}$ et $y'=\frac{1}{y}$, on a à résoudre le système

$$\left\{\begin{aligned} &x'+y'=\frac{1}{a},\\ &x'-y'=b,\end{aligned}\right.$$

d'où, en ajoutant et retranchant membre à membre,

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+b\right),\quad y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-b\right),$$

et par suite

$$x=\frac{2a}{1+ab},\quad y=\frac{2a}{1-ab}.$$

Mais on a perdu la solution $x=0$, $y=0$.

Exercices

Résoudre les équations simultanées suivantes :

1. — $3x+5y=9,\qquad 5x-7y=18.$

2. — $\frac{2}{3}x+45y=\frac{7}{5},\qquad -\frac{3}{4}x+\frac{5}{7}y-47=0.$

3. — $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\qquad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1.$

4. — $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c}, \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1-\frac{y}{c}.$

5. — $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \frac{x}{2a}-\frac{y}{4b}=1.$

6. — $\begin{cases} 2x+5y-\frac{9}{4}=\frac{7}{3}y-\frac{5}{6}\left(x-\frac{3}{4}\right), \\ 4x+3y-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{6}\right). \end{cases}$

7. — $\begin{cases} \frac{2x-2y}{4}+\frac{x+y}{5}=1-\frac{5}{6}x, \\ \frac{3x+3y}{5}-\frac{x-y}{7}=2+\frac{7}{3}x. \end{cases}$

8. — $\begin{cases} ax+by+c=0, \\ \frac{a}{bx+c}=\frac{b}{ay+c}. \end{cases}$

9. — $\begin{cases} (a^2-b^2)x+(a^2+b^2)y=a^2, \\ (a^3-b^3)x+(a^3+b^3)y=b^3. \end{cases}$

10. — $\begin{cases} (a^2-b^2)x+(a+b+c)y-a^3+a^2b-b=0, \\ (a^3+b^3)x+(a^3+b^3+c^3-3abc)y=a^2(a^2+b) \\ \qquad +b(b^2+c^2-a^3)+ab^2(a-1)-bc(a+b). \end{cases}$

11. — $\begin{cases} 2x-3y+4z=4, \\ 3x+4y-5z=6, \\ -8x+7y+2z=5. \end{cases}$

12. — $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=\frac{1}{5}, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=\frac{1}{6}, \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\frac{1}{4}. \end{cases}$

13. — $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0, \\ x+by+b^2z+b^3=0, \\ x+cy+c^2z+c^3=0. \end{cases}$

14. — $\begin{cases} x-2y+5z+3t=4, \\ y+2z-4x=5-7t, \\ 3z+2y=3-8x-9t, \\ 6y+8x-9=4+7z+3t. \end{cases}$

15. — $\begin{cases} x + y + z = m, \\ bcx + cay + bcz = n, \\ (b + c)\, x + (c + a)\, y + (a + b)\, z = p. \end{cases}$

16. — $\begin{cases} xy = ax + by, \\ xz = a'x + b'z, \\ yz = a''y + b''z. \end{cases}$

17. — Résoudre les équations

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = m\left(1 + \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{m}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = n\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

18. — Résoudre les équations

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = m\left(1 + \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{m}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = n\left(1 + \dfrac{z}{c}\right), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{z}{c}\right). \end{cases}$$

19. — Le système d'équations

$$\begin{cases} bz - cy = m, \\ cx - az = n, \\ ay - bz = p \end{cases}$$

est en général impossible.

Quelle condition doivent vérifier les nombres a, b, c, m, n, p pour qu'il ait des solutions ? Que sont alors ces solutions ?

20. — Quand le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

est-il impossible ou indéterminé?

CHAPITRE III

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

120. — Résoudre un *problème*, c'est déterminer, à l'aide de conditions données, certains nombres ou certaines grandeurs inconnues. En remplaçant comme d'habitude les grandeurs par les nombres qui les mesurent quand on les rapporte à une certaine unité, spécifiée ou non, mais toujours la même pour les grandeurs de même espèce qui figurent dans une question, on est toujours ramené à déterminer des nombres inconnus. Les problèmes de géométrie ne font pas exception : si l'on demande de construire une certaine figure satisfaisant à des conditions données, il est clair qu'il suffit de déterminer certaines lignes dont la connaissance permettra de ramener le problème à des constructions simples et connues.

Pour résoudre un problème on commence par le *mettre en équation :* à cet effet, on désigne par les lettres x, y, z... les inconnues du problème et les inconnues auxiliaires que l'on juge utile d'introduire, et l'on exprime à l'aide des conditions de l'énoncé toutes les relations qui existent entre ces inconnues et entre les *données* du problème. On obtient ainsi une équation, ou un système de plusieurs équations simultanées, suivant les cas.

Il faut remarquer que dans certains cas le problème peut admettre diverses sortes de solutions; dans ces cas, on mettra le problème en équation pour chaque sorte de solutions : on ne négligera pas d'abréger le plus possible cette besogne, en se souvenant que quand il s'agit de grandeurs susceptibles d'être comptées dans des sens différents, une seule formule suffit, en général, pour embrasser tous les cas possibles, ainsi que nous l'avons montré au chapitre III du Livre Ier.

Ayant obtenu les équations qui correspondent à une solution d'une certaine espèce, il est clair que toute solution de cette espèce est une solution de ces équations; mais la réciproque n'est pas vraie en général. Donc, il ne faudra pas se contenter de résoudre les équations obtenues, mais il faudra encore *discuter* les solutions de ces équations; une telle solution ne conviendra au problème que si elle satisfait à certaines conditions faciles à énoncer *a priori*, et qui résultent de la nature même du problème et de l'espèce de solution envisagée. Pour faire cette discussion, on aura en général à résoudre des inégalités.

Ces considérations générales vont être suffisamment éclaircies par les exemples auxquels est consacré ce chapitre.

Un problème est dit du premier degré, quand pour le résoudre, il suffit de résoudre des équations du premier degré.

Un problème est dit du degré n, quand pour le résoudre, il faut résoudre une équation du n^e degré et des équations du premier degré.

Nous ne nous occupons actuellement que des problèmes du premier degré. Remarquons que les problèmes d'intérêts, d'escompte, de partages proportionnels, de mélanges et d'alliages que nous avons résolus en arithmétique sont tous des problèmes du premier degré.

Problème I

121. — Trouver un nombre dont le quart augmenté du septième soit égal aux cinq sixièmes du reste diminués de $\frac{19}{6}$.

En appelant x le nombre cherché, l'énoncé conduit immédiatement à l'équation

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{7}=\frac{5}{6}\left(x-\frac{x}{4}-\frac{x}{7}\right)-\frac{19}{6},$$

qui devient, en chassant le dénominateur numérique,

$$42x + 24x = 140x - 35x - 20x - 19 \times 28,$$

ou

$$19x = 19 \times 28,$$
$$x = 28.$$

Le nombre cherché est 28.

Problème II

Deux robinets ouverts, le premier pendant 2 heures et le second pendant 3 heures, ont donné ensemble 2200 litres; si le premier coule pendant 3 heures, et le second pendant 2 heures, le débit total est de 2300 litres. Quel est le débit de chaque robinet pendant une heure?

Soient x et y les débits des deux robinets pendant une heure, exprimés en litres; les conditions de l'énoncé donnent les équations

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2200, \\ 3x + 2y = 2300; \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} x = 500, \\ y = 400. \end{cases}$$

Cette solution convient au problème, puisque les valeurs trouvées pour x et y sont positives.

Problème III

Trouver un nombre de trois chiffres tel que la somme de ses chiffres soit 16, que la somme des deux chiffres extrêmes soit triple du chiffre moyen, et que si l'on retranche de ce nombre le nombre que l'on obtient en écrivant ses chiffres en ordre inverse, la différence soit 198.

Soient x, y, z les chiffres des centaines, des dizaines et des unités dans le nombre cherché. Les deux premières

conditions de l'énoncé donnent d'abord les équations

$$x + y + z = 16,$$
$$x + z = 3y;$$

remarquant ensuite que le nombre cherché a pour valeur $100x + 10y + z$, et que le nombre formé en écrivant les chiffres du nombre cherché en ordre inverse a pour valeur $100z + 10y + x$, on obtient la troisième équation

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 198.$$

On a donc à résoudre le système

$$\begin{cases} x + \ \ y + z = 16, \\ x - 3y + z = 0, \\ 99x - 99z = 198. \end{cases}$$

La troisième équation s'écrit plus simplement après division par 99 :

$$x - z = 2.$$

Retranchant la seconde équation de la première membre à membre, il vient :

$$4y = 16,$$

d'où

$$y = 4;$$

on a alors :

$$\begin{cases} x + z = 12, \\ x - z = 2, \end{cases}$$

d'où en ajoutant et retranchant membre à membre :

$$x = 7, \ z = 5.$$

Cette solution convient au problème puisque les valeurs de x, y, z sont des nombres entiers positifs, inférieurs à 10. Le nombre cherché est 745.

Remarquons que nous avons été amenés à trouver deux nombres, connaissant leur somme a et leur différence b; le premier est égal à $\frac{a+b}{2}$, le second à $\frac{a-b}{2}$.

PROBLÈME IV

Un renard poursuivi par un lévrier a 75 sauts d'avance; il en fait 9 pendant que le lévrier en fait 6, et 3 sauts du lévrier valent 7 sauts du renard; on demande combien le lévrier fait de sauts avant d'atteindre le renard.

Appelons x le nombre cherché, et prenons pour unité de longueur le saut du lévrier; le lévrier parcourt alors une longueur x avant d'atteindre le renard; le saut du renard vaut $\frac{3}{7}$ d'après l'énoncé, et par suite la distance qui sépare le renard du lévrier au commencement est mesurée par $\frac{3}{7}\times 75$. Pendant que le lévrier fait x sauts, le renard en fait $\frac{9}{6}x$ ou $\frac{3}{2}x$, d'après l'énoncé, et par suite parcourt une distance mesurée par $\frac{3}{7}\times\frac{3}{2}x$ ou $\frac{9}{14}x$. Quand le lévrier atteint le renard, on a :

$$x=\frac{3}{7}\times 75+\frac{9}{14}x,$$

d'où

$$14x=450+9x,$$
$$x=90.$$

Cette solution, positive, convient au problème.

PROBLÈME V

On demande l'âge d'une personne au moment de sa mort, sachant qu'elle a passé dans la jeunesse le sixième de sa vie, et dans l'adolescence le douzième; qu'ensuite elle s'est mariée et a passé dans cette union le septième de sa vie plus 5 ans avant d'avoir un fils auquel elle a survécu de 4 ans et qui n'a

atteint que la moitié de l'âge auquel la personne considérée est parvenue.

Soit x le nombre d'années cherché; l'énoncé donne immédiatement l'équation

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\left(\frac{x}{7}+5\right)+\frac{x}{2}+4,$$

d'où $$x=84.$$

Problème VI

Un lingot d'or et d'argent pèse 10^{Kgr}; plongé dans l'eau il ne pèse plus que $9^{Kgr},375$. Quels sont les poids d'or et d'argent contenus dans le lingot, sachant que la densité de l'or est 19,3 et celle de l'argent 10,5 et aussi que, d'après le principe d'Archimède, un corps plongé dans l'eau perd une partie de son poids égale au poids de l'eau déplacée.

Soient x et y les poids cherchés exprimés en kilogrammes; on a d'abord :

$$x+y=10;$$

l'or ne pèse plus dans l'eau que $x-\frac{x}{19,3}$ et l'argent ne pèse plus que $y-\frac{y}{10,5}$; on a donc la seconde équation

$$x-\frac{x}{19,3}+y-\frac{y}{10,5}=9,375,$$

ou, en profitant de la première,

$$\frac{x}{19,3}+\frac{y}{10,5}=0,625.$$

On en déduit en résolvant :

$$x=\frac{19,3\,(10-0,625\times 10,5)}{19,3-10,5}=7,539,$$

et par suite

$$y=10-7,539=2,461.$$

Cette solution convient au problème, puisque les valeurs de x et y sont positives.

Problème VII

122. — Trouver deux nombres tels qu'en augmentant le premier de 2 et le second de 3, leur produit augmente de 12, et qu'en diminuant le premier de 4 et le second de 6, leur produit diminue de 24.

Appelant x et y les deux nombres, on a les deux équations

$$\begin{cases}(x+2)(y+3)=xy+12,\\(x-4)(y-6)=xy-24,\end{cases}$$

ou en réduisant

$$\begin{cases}3x+2y=6,\\6x+4y=48.\end{cases}$$

Multipliant la première par 2 et retranchant membre à membre de la seconde, on trouve $0=36$. Le problème est donc impossible.

Problème VIII

Trouver deux nombres tels qu'en augmentant le premier de 2 et le second de 3, leur produit augmente de 45, et qu'en diminuant le premier de 4 et le second de 6, leur produit diminue de 54.

Appelant x et y les deux nombres, on a les deux équations

$$\begin{cases}(x+2)(y+3)=xy+45,\\(x-4)(y-6)=xy-54,\end{cases}$$

ou en réduisant

$$\begin{cases}3x+2y=39,\\6x+2y=78.\end{cases}$$

En multipliant la première par 2, et retranchant de la seconde membre à membre, on trouve $0=0$. Le problème est donc indéterminé. y peut recevoir une valeur quelconque positive ou négative et x est déterminé par la relation

$$3x+2y=39,$$

ou

$$x=13-\frac{2}{3}y.$$

PROBLÈME IX

Trouver un nombre de 3 chiffres, sachant que le chiffre des centaines est le quadruple de celui des unités, et que la somme des trois chiffres augmentée de celui des dizaines est égale à 7.

Si x, y, z sont les chiffres des centaines, des dizaines et des unités, le problème donne seulement les deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} x=4z, \\ x+2y+z=7, \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} x=4z, \\ y=\dfrac{7-5z}{2}. \end{cases}$$

S'il s'agissait seulement de résoudre les équations ci-dessus, z pourrait recevoir une valeur arbitraire et la question serait indéterminée. Mais pour qu'une solution des équations convienne au problème, il faut que x, y, z soient des nombres entiers positifs ou nuls inférieurs à 10. Donc x étant égal à $4z$, z ne peut recevoir que les valeurs 0, 1 ou 2 ; en outre, il faut que y soit entier et positif ; donc les valeurs 0 et 2 pour z sont à rejeter, et l'on ne peut prendre que $z=1$, ce qui donne $x=4$ et $y=1$. Le nombre cherché est 411.

PROBLÈME X

Trouver un nombre de deux chiffres tel que la somme de ses chiffres soit 16.

En appelant x et y les deux chiffres des dizaines et des unités, on a la seule équation

$$x+y=16,$$

d'où

$$x=16-y.$$

Il faut que x et y soient des nombres entiers positifs ou nuls, inférieurs à 10 ; on a donc les diverses solutions suivantes :

$$\begin{cases} y=7, \\ x=9, \end{cases} \quad \begin{cases} y=8, \\ x=8, \end{cases} \quad \begin{cases} y=9, \\ x=7. \end{cases}$$

Les trois nombres 97, 88 et 79 répondent seuls à la question, qui est déterminée, bien que l'on trouve une seule équation à deux inconnues quand on met le problème en équation.

Problème XI

123. — Un train express transporte n voyageurs de première et de seconde classe; déterminer le nombre des voyageurs de chaque classe, sachant qu'ils ont payé en tout p francs et que chaque voyageur de première classe a payé 36 francs, chaque voyageur de seconde classe 24 francs.

En appelant x et y les nombres de voyageurs de première et de seconde classe, on a les équations

$$\begin{cases} x+y=n, \\ 36x+24y=p, \end{cases}$$

qui, résolues, donnent :

$$\begin{cases} x=\dfrac{p}{12}-2n, \\ \\ y=3n-\dfrac{p}{12}. \end{cases}$$

D'après la nature du problème n est un nombre entier positif, et cette solution ne peut convenir au problème que si les valeurs de x et y sont elles-mêmes entières et positives (ou nulles).

Il faut donc pour que le problème soit possible :

1° que p soit un nombre entier divisible par 12;

2° que l'on ait :

$$\frac{p}{12} \geqslant 2n \quad \text{et} \quad 3n \geqslant \frac{p}{12}$$

ou

$$24n \leqslant p \leqslant 36n.$$

Dans tout autre cas, le problème est impossible.

Problème XII

Trouver un nombre de trois chiffres, sachant que la somme de ses chiffres est égale à a, que le chiffre des centaines est double du chiffre des unités, et que le chiffre des dizaines est égal à la somme des deux autres.

En appelant x, y, z les chiffres des centaines, des dizaines et des unités, on a les équations

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x = 2z, \\ y = x + z, \end{cases}$$

qui, résolues, donnent immédiatement :

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{2}, \quad z = \frac{a}{6}.$$

Il faut que x, y, z soient des nombres entiers, positifs inférieurs à 10; donc, pour que le problème soit possible, il faut que a soit un entier positif, divisible par 6 et inférieur à 20; a ne peut donc avoir que les valeurs 6, 12 et 18.

Bien que le problème dépende d'un paramètre, il est donc déterminé, et les trois nombres 231, 462, 693 répondent seuls à la question.

Problème XIII

Trois joueurs se mettent au jeu en convenant que le perdant doublera l'avoir des deux autres; après

trois parties perdues successivement par le premier, le second et le troisième joueur, ils se retirent avec des sommes respectivement égales à a, b, c. Quelle était la mise de chaque joueur en commençant le jeu?

Soient x, y, z les mises des trois joueurs ; après la première partie, les avoirs sont respectivement

$$x-y-z, \qquad 2y, \qquad 2z;$$

après la seconde, ils sont :

$$2(x-y-z), \qquad 2y-(x-y-z)-2z, \qquad 4z,$$

ou

$$2x-2y-2z, \qquad -x+3y-z, \qquad 4z;$$

enfin après la troisième ils sont

$$2(2x-2y-2z), \qquad 2(-x+3y-2),$$
$$4z-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z),$$

ou

$$4x-4y-4z, \quad -2x+6y-2z, \quad -x-y+7z.$$

On a donc les équations

$$\begin{cases} 4x-4y-4z=a, \\ -2x+6y-2z=b, \\ -x-y+7z=c, \end{cases}$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent :

$$x+y+z=a+b+c,$$

comme cela devait être évidemment, puisque la somme des enjeux n'a pas varié.

Ces équations donnent :

$$\begin{cases} x=\dfrac{5a+4b+4c}{8}, \\ y=\dfrac{2a+3b+2c}{8}, \\ z=\dfrac{a+b+2c}{8}. \end{cases}$$

Cette solution convient au problème, car les valeurs des inconnues sont positives en même temps que a, b, c, et en outre, les avoirs des trois joueurs, après chaque partie, sont positifs, comme on le voit immédiatement.

PROBLÈME XIV

124. — Pour faire un ouvrage, un ouvrier A_1 met p fois plus de temps que les ouvriers A_2 et A_3 travaillant ensemble; A_2 met q fois plus de temps que A_1 et A_3 travaillant ensemble; alors A_3 met x fois plus de temps que A_1 et A_2 travaillant ensemble. On demande de calculer le nombre x.

Appelons t_1, t_2, t_3 les temps que mettraient les ouvriers A_1, A_2, A_3 pour faire l'ouvrage considéré, chacun travaillant seul.

Pendant l'unité de temps, A_2 et A_3 travaillant seuls font chacun une fraction de l'ouvrage marquée par $\frac{1}{t_2}$ et $\frac{1}{t_3}$; travaillant ensemble ils font une fraction de l'ouvrage marquée par $\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}$, et par suite pour faire l'ouvrage entier il leur faut un temps égal à $\dfrac{1}{\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}}$ ou $\dfrac{t_2t_3}{t_2+t_3}$.

On a donc la première équation

$$t_1 = p\frac{t_2t_3}{t_2+t_3}.$$

De même on a les deux autres équations

$$t_2 = q\frac{t_1t_3}{t_1+t_3},$$

$$t_3 = x\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}.$$

On peut écrire ces équations sous la forme

$$\begin{cases} t_1t_2 + t_1t_3 - pt_2t_3 = 0, \\ t_1t_2 - qt_1t_3 + t_2t_3 = 0, \\ -xt_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 0. \end{cases}$$

Les deux premières donnent :

$$t_1t_3 = t_1t_2\frac{1+p}{pq-1}, \quad t_2t_3 = t_1t_2\frac{1+q}{pq-1}.$$

Portant dans la troisième et divisant par t_1t_2, il vient :

$$-x + \frac{1+p}{pq-1} + \frac{1+q}{pq-1} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{2+p+q}{pq-1}.$$

Le problème n'est possible que si pq est supérieur à 1.

Problème XV

Trois prés ont des surfaces mesurées par a, a', a''; l'herbe a la même hauteur dans chacun d'eux et y croît d'un mouvement uniforme commun. Le premier peut nourrir n bœufs pendant un temps t, et le second n' bœufs pendant un temps t'. Combien de bœufs pourra nourrir le troisième pendant le temps t''?

(Les bœufs sont supposés manger tous la même quantité d'herbe pendant le même temps.)

Soit x le nombre cherché; appelons y la hauteur de l'herbe dans chacun des prés, v la vitesse avec laquelle elle croît, et z la quantité d'herbe que mange chaque bœuf pendant l'unité de temps. Le premier pré pendant le temps t fournit une quantité d'herbe mesurée par $(y + vt)$, et par suite on a l'équation

$$ntz = a(y + vt);$$

de même on a les deux autres équations

$$n't'z = a'(y + vt'),$$
$$xt''z = a''(y + vt'').$$

Les deux premières donnent :

$$v = z\frac{nta' - n't'a}{aa'(t - t')}, \quad y = ztt'\frac{n'a - na'}{aa'(t - t')}.$$

Portant dans la troisième et divisant par z, il vient :

$$x = \frac{a''[(nta' - n't'a)t'' + tt'(n'a - na')]}{aa't''(t - t')}$$
$$= \frac{a''[nta'(t'' - t') - n't'a(t'' - t)]}{aa't''(t - t')}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que v et y soient positifs, car alors x sera aussi positif.

Donc en supposant $t > t'$, on doit avoir :

$$n'a - na' > 0 \quad \text{et} \quad nta' - n't'a > 0,$$

c'est-à-dire

$$1 < \frac{n'a}{na'} < \frac{t}{t'}.$$

Si le nombre x n'est pas entier, il n'y a pas impossibilité : n étant compris entre les deux entiers consécutifs N et N + 1, le troisième pré pourra nourrir plus de N bœufs, mais n'en pourra pas nourrir N + 1 pendant le temps t''.

Problème XVI

Un héritage est partagé de la façon suivante : le premier héritier prend *a* francs et la n^{me} partie du reste ; le second prend 2*a* francs et la n^{me} partie du reste ; le troisième prend 3*a* francs et la n^{me} partie du reste ; et ainsi de suite. L'héritage se trouve ainsi exactement partagé en parts égales. Quel est le nombre des héritiers et la part de chacun ?

Appelons x la valeur de l'héritage, et écrivons d'abord

que les deux premières parts sont égales; on a l'équation

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{1}{n}\left[x-a-\frac{x-a}{n}-2a\right],$$

d'où

$$x=an^2-2an+a=a(n-1)^2.$$

La part du premier héritier est donc

$$a+\frac{a}{n}\left((n-1)^2-1\right) \quad \text{ou} \quad a(n-1).$$

Par suite, il y a $n-1$ héritiers, puisque la part de chacun est $a(n-1)$ et que l'héritage total est $a(n-1)^2$.

Toutefois, ce que nous venons de dire n'est pas suffisant; en effet nous avons trouvé les inconnues en écrivant une partie seulement des conditions de l'énoncé. Si les autres ne sont pas vérifiées d'elles-mêmes, il y a impossibilité. Il faut donc s'assurer que les autres conditions sont vérifiées.

Supposons que ces conditions soient vérifiées pour les p premières parts, qui seront toutes égales à $(n-1)a$ par suite. Alors la $(p+1)^{me}$ part sera d'après l'énoncé :

$$(p+1)a+\frac{1}{n}\left((n-1)^2a-p(n-1)a-(p+1)a\right),$$

ou en réduisant

$$a(n-1).$$

On voit ainsi que le problème est possible et admet la solution trouvée.

Problème XVII

125. — Un père a 53 ans, son fils en a 17; dans combien de temps l'âge du père sera-t-il double de celui du fils?

Soit x le temps cherché mesuré en années; on a l'équation évidente

$$53+x=2(17+x),$$

d'où

$$x=19.$$

Cette solution convient au problème, puisqu'elle est positive.

Problème XVIII

Un père a 60 ans, son fils en a 22; dans combien de temps l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils?

On a l'équation

$$60+x=3(22+x),$$

où x représente le temps cherché mesuré en années.

On en tire :

$$x=-3.$$

Le problème est donc impossible; jamais l'âge du père ne sera le triple de celui du fils.

Problème XIX

Un père a 60 ans, son fils en a 22; on demande l'époque à laquelle l'âge du père est triple de celui du fils.

Comptons le temps dans les deux sens à partir du moment donné, et mesurons-le par un nombre algébrique positif ou négatif suivant que l'époque correspondante suit ou précède le moment donné, comme au n° **59**. Alors on a, en appelant x le nombre qui correspond à l'époque cherchée :

$$60+x=3(22+x),$$

d'où

$$x=-3.$$

Donc l'âge du père est triple de l'âge du fils 3 ans avant l'instant donné, puisque la solution trouvée est négative.

Si l'on ne s'était pas servi des nombres négatifs, il aurait fallu envisager deux cas, en supposant successivement l'époque cherchée postérieure et antérieure au

moment donné; on aurait eu ainsi les deux équations distinctes :

$$60+x=3(22+x) \quad \text{et} \quad 60-x=3(22-x).$$

La première n'a pas de racine positive, la seconde en a une $x=3$; c'est donc 3 ans avant le moment donné que l'âge du père est triple de celui du fils.

Problème XX

Un père a 60 ans et son fils en a 22; on demande l'époque à laquelle l'âge du père diminué de 46 ans est le double de celui du fils.

Soit, comme précédemment, x le nombre positif ou négatif qui correspond à l'époque cherchée; on a l'équation

$$60+x-46=2(22+x),$$

d'où

$$x=-30.$$

Cette solution est à rejeter, et le problème est impossible, non pas parce qu'elle est négative, mais parce que 30 ans avant le moment donné, le fils n'existait pas.

Problème XXI

126. — Deux mobiles décrivent une droite X'X d'un mouvement uniforme; le premier passe au point A à une époque connue et le second au point A' à une autre époque connue. On demande l'époque de leur rencontre et leur position M à ce moment (*fig.* 21).

Faisons les mêmes conventions qu'au n° 59; la position

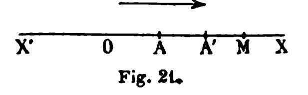


Fig. 21.

d'un point sur la droite X'X sera définie par son abscisse comptée à partir d'un point O, positivement dans le

sens X'X; le temps sera mesuré par un nombre algébrique à partir d'une origine arbitraire; la vitesse d'un mobile sera mesurée par un nombre algébrique positif ou négatif suivant que ce mobile se déplace dans le sens X'X ou dans le sens opposé.

Soient a et a' les segments $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$, t_0 et t'_0 les époques des passages des deux mobiles en A et A', v et v' leurs vitesses, x le segment $\overline{OM}$, t l'époque de leur rencontre. On a, dans tous les cas possibles, les équations

$$\begin{cases} x = a + v(t - t_0), \\ x = a' + v'(t - t'_0), \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} t = \dfrac{vt_0 - v't'_0 - a + a'}{v - v'} \\ x = \dfrac{vv'(t_0 - t'_0) - av' + a'v}{v - v'}. \end{cases}$$

Ces formules déterminent, dans tous les cas possibles, le point M et l'époque du passage commun des mobiles en M.

Si $v = v'$, les équations du problème sont impossibles, à moins que l'on n'ait $a - vt_0 = a' - v't'_0$. Donc si cette condition n'est pas vérifiée, les deux mobiles ne se rencontrent jamais, ce qui est évident; si elle est vérifiée, ils sont toujours ensemble.

Si les lettres au lieu de représenter des nombres, représentent des paramètres, on est amené à dire que lorsque les vitesses deviennent égales sans que l'on ait $a - vt_0 = a' - v't'_0$, les mobiles se rencontrent à l'infini au bout d'un temps infini, ce qui signifie, d'une façon précise, que si les quantités variables v et v' tendent à devenir égales, le point de rencontre des mobiles, qui existe, s'éloigne indéfiniment sur X'X, et que l'époque de leur rencontre est elle-même indéfiniment éloignée de celles de leurs passages en A et A', ce qui se comprend de soi.

Si en même temps que $v' - v$ tend vers zéro, il en est

de même de $a - vt_0 - (a' - v't'_0)$, le point de rencontre des mobiles ne tend vers aucune position déterminée; l'époque de leur rencontre ne tend de même vers aucune époque déterminée.

Le problème précédent est susceptible de nombreuses applications numériques qu'il sera facile de traiter directement afin de bien se rendre compte de la généralité des formules obtenues.

Problème XXII

Deux mobiles décrivent une circonférence C d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire que chacun d'eux se déplace toujours dans le même sens, en parcourant des arcs égaux pendant des temps égaux; à des époques connues ils passent respectivement en A et A'. On demande les époques de leurs rencontres et leurs positions M quand ils se rencontrent (*fig.* 22).

Choisissons sur la circonférence C un sens de circulation marqué sur la figure par une flèche et que nous appellerons sens positif, le sens négatif étant le sens opposé. Soit aussi O un point fixe de la circonférence. Appelons a_0 le nombre arithmétique qui mesure à l'aide d'une unité quelconque la longueur de l'arc OA plus petit qu'une circonférence, parcouru de O en A dans le sens positif; la connaissance du nombre a_0 définit complètement le point A quand on connaît le point O et le sens positif de circulation. Appelons maintenant *abscisses* du point A de la circonférence les différents nombres a que l'on obtient en ajoutant à a_0 un multiple quelconque positif, négatif ou nul de la circonférence C. Il est clair que le point A est déterminé par la connaissance d'une quelconque de ses abscisses. Il est clair aussi que si l'on va du

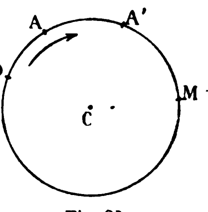


Fig. 22.

point A au point M en marchant toujours dans le même sens et décrivant autant de fois qu'on voudra la circonférence, et si l'on mesure le chemin parcouru par un nombre algébrique l, positif ou négatif suivant que l'on s'est déplacé dans le sens positif ou dans le sens négatif, et dont la valeur absolue est le nombre arithmétique mesurant la longueur du chemin parcouru, la somme $a+l$, où a est une abscisse de A, sera une abscisse de M.

Ceci posé, comptons le temps comme dans le problème précédent, et appelons t_0 et t'_0 les époques connues des passages des deux mobiles en A et A', points qui seront définis par deux abscisses a et a'.

Appelons aussi v et v' les vitesses des deux mobiles comptées positivement ou négativement suivant qu'ils se déplacent dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Si les mobiles se rencontrent en M à l'époque t, il est clair que, comme au n° 59, les nombres $a+v(t-t_0)$ et $a'+v'(t-t_0)$ seront deux abscisses du point M : par suite ces deux nombres devront différer d'un multiple de C. Les époques des rencontres sont donc déterminées par l'équation

$$a+v(t-t_0)-a'-v'(t-t'_0)=k\mathrm{C},$$

k étant un entier quelconque, positif, négatif ou nul.

Les positions des points de rencontre s'en déduisent immédiatement.

L'équation précédente donne :

$$t=\frac{k\mathrm{C}+vt_0-v't'_0-a+a'}{v-v'}.$$

Il y a une infinité d'époques de rencontre, ainsi qu'il était évident *a priori*, si v est différent de v' : car k peut recevoir toutes les valeurs entières possibles. Toutes ces époques se succèdent à un intervalle constant égal à

$$\frac{\mathrm{C}}{v-v'}.$$

Si v est égal à v', les mobiles ne se rencontrent ja-

mais ou sont toujours ensemble suivant que la quantité $vt_0 - v't'_0 - a + a'$ n'est pas ou est un multiple de C.

Applications. — Ce problème est susceptible de nombreuses applications. Citons-en une :

Quelles sont les heures où les deux aiguilles d'une montre sont l'une sur l'autre, depuis midi jusqu'à minuit?

Comptons le temps à partir de midi, époque où les deux aiguilles sont l'une sur l'autre; alors on peut faire

$$t_0 = t'_0 = 0, \quad a = a' = 0.$$

Prenons pour unité de longueur une division du cadran; alors $C = 60$; prenons pour unité de temps l'heure; alors la vitesse v de la grande aiguille sera 60, la vitesse v' de la petite aiguille sera 5. On a donc la formule

$$t = \frac{60k}{60-5} = k\frac{12}{11}.$$

Donnons à k des valeurs entières telles que t soit inférieur à 12, et positif : on fera successivement

$$k = 1,\ k = 2,\ k = 3, \ldots\ k = 9,\ k = 10,$$

et les heures cherchées sont

$$\frac{12}{11},\quad \frac{24}{11},\quad \frac{36}{11},\ldots,\quad \frac{108}{11},\quad \frac{120}{11},$$

ou

$$1^h\frac{1}{11},\quad 2^h\frac{2}{11},\quad 3^h\frac{3}{11},\ldots,\quad 9^h\frac{9}{11},\quad 10^h\frac{10}{11},$$

qu'il est facile d'exprimer en heures, minutes et secondes.

Remarque. — On traiterait d'une façon analogue la question suivante : *A quelles époques les deux mobiles sont-ils à une distance* d *l'un de l'autre?*

Si l'on ne fixe pas quel est celui des deux mobiles qui est devant l'autre, dans le sens positif, on trouve la formule

$$t = \frac{kC \pm d + vt_0 - v't'_0 - a + a'}{v - v'}.$$

Exemple. — *A quel moment entre* 7^h *et* 8^h *les deux aiguilles d'une montre sont-elles perpendiculaires?*

Prenons 7 heures pour origine du temps; alors, en conservant les mêmes unités que précédemment, on a pour la grande aiguille :

$$a=0,\ t_0=0,\ v=60,$$

et pour la petite :

$$a'=35,\ t'_0=0,\ v'=5\,;$$

d'ailleurs ici

$$d=15.$$

Donc les heures de rencontre sont données par la formule

$$t=\frac{60k\pm15+35}{55}.$$

Il faut que t soit inférieur à 1, et par suite k ne peut recevoir que la valeur 0; et l'on a les deux valeurs

$$t_1=\frac{4}{11}\quad\text{et}\quad t_2=\frac{10}{11}.$$

Les heures cherchées sont

$$7^h\frac{4}{11}\quad\text{et}\quad 7^h\frac{10}{11}.$$

Problème XXIII

127. — Etant donné un trapèze ABCD, mener entre les côtés non parallèles une parallèle aux bases qui ait une longueur donnée (*fig.* 23).

La figure peut offrir quatre dispositions différentes, suivant que la parallèle cherchée occupe l'une ou l'autre des positions E_0F_0, E_1F_1, E_2F_2 ou E_3F_3.

Appelons b la grande base AB, b' la petite base CD, h la hauteur du trapèze, et par le point O, point de rencontre des côtés non parallèles, menons la perpendiculaire aux bases qui coupe AB en P, CD en Q, E_0F_0 en R_0, E_1F_1

en R_1, etc. Quel que soit l'indice i des lettres E, F, R, on a :

$$\frac{E_iF_i}{OR_i}=\frac{AB}{OP}=\frac{CD}{OQ},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{AB \pm E_iF_i}{OP \pm OR_i}=\frac{AB-CD}{OP-OQ}.$$

Ceci posé, soit x le segment $\overline{PR_i}$ compté positive-

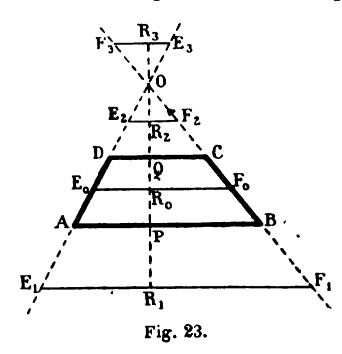


Fig. 23.

ment dans la direction PO, et soit l la longueur donnée ; pour $i=0$, on a l'équation

$$\frac{b-l}{x}=\frac{b-b'}{h}, \text{ avec } \quad 0<x<h;$$

pour $i=1$, on a l'équation

$$\frac{b-l}{x}=\frac{b-b'}{h}, \text{ avec } \quad x<0;$$

pour $i=2$, on a l'équation

$$\frac{b-l}{x}=\frac{b-b'}{h}, \text{ avec } \quad h<x<\frac{bh}{b-b'}, \text{ car } OP=\frac{bh}{b-b'};$$

pour $i=3$, on a l'équation

$$\frac{b+l}{x}=\frac{b-b'}{h}, \quad \text{avec} \quad x>\frac{bh}{b-b'}.$$

Il faut donc résoudre d'abord l'équation

$$\frac{b-l}{x}=\frac{b-h'}{h}:$$

une racine positive et inférieure à h de cette équation correspondra à une droite E_0F_0; une racine négative correspondra à une droite E_1F_1 ; une racine comprise entre h et $\frac{bh}{b-b'}$ correspondra à une droite E_2F_2.

Il faudra ensuite résoudre l'équation

$$\frac{b+l}{x}=\frac{b-b'}{h},$$

et une racine de cette équation correspondra à une droite E_3F_3, si elle est supérieure à $\frac{bh}{b-b'}$.

Or, la première équation donne :

$$x=\frac{(b-l)h}{b-b'},$$

valeur toujours inférieure à $\frac{bh}{b-b'}$.

Donc une des solutions E_0F_0, E_1F_1, E_2F_2 existe toujours : la première si l est compris entre b et b'; la seconde, si l est plus grand que b; la troisième si l est plus petit que b'.

La seconde équation donne ensuite :

$$x=\frac{(b+l)h}{b-b'},$$

valeur toujours supérieure à $\frac{bh}{b-b'}$. Donc la solution E_3F_3 existe toujours.

En résumé, le problème admet toujours deux solutions : l'une qui correspond à la position E_3F_3, et l'autre qui correspond, suivant les cas, à l'une des positions E_0F_0, E_1F_1 ou E_2F_2.

PROBLÈME XXIV

Sur le prolongement du côté AB d'un triangle rectangle en A, trouver un point M tel que CM soit moyenne proportionnelle entre AM et BM (*fig.* 24).

La figure est différente suivant que le point cherché occupe une position telle que M_0 ou telle que M_1. Dans tous les cas appelons x le segment $\overline{AM_0}$ ou $\overline{AM_1}$ compté positivement dans le sens AB. Alors si l'on fait $AB = a$, $AC = b$, on a toujours l'équation

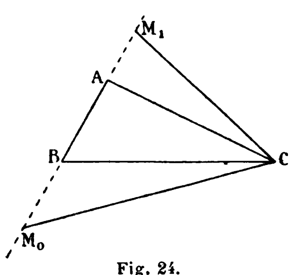


Fig. 24.

$$b^2 + x^2 = x(x - a),$$

car les triangles rectangles CAM_0 et CAM_1 donnent $b^2 + x^2$ pour valeur de $\overline{CM}^2_0$ ou $\overline{CM}^2_1$, et si M est en M_0, on a :

$$AM_0 = x, \quad BM_0 = x - a;$$

si M est en M_1, on a :

$$AM_1 = -x \quad BM_1 = a - x.$$

Une solution de l'équation précédente convient au problème si elle est positive et supérieure à a (on a alors une position M_0), ou bien si elle est négative (on a alors une position M_1). Or l'équation précédente admet l'unique solution négative

$$x = -\frac{b^2}{a}.$$

Donc le problème a une solution et une seule ; le point cherché occupe une position telle que M_1.

PROBLÈME XXV

Sur le côté BC d'un triangle ABC, trouver un point M tel que la somme de ses distances aux deux

autres côtés soit égale à une longueur donnée (*fig.* 25).

La figure est différente suivant que le point cherché occupe une position telle que M_0, ou telle que M_1, ou telle que M_2.

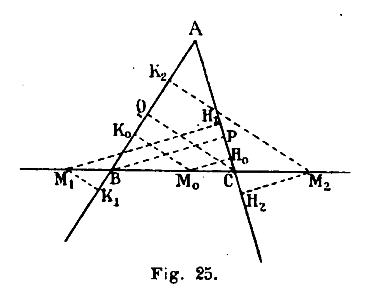


Fig. 25.

Soient BP et CQ les hauteurs issues de B et C; M_iH_i, et M_iK_i les perpendiculaires menées de M_i sur AC et AB. Dans tous les cas, on a par les triangles semblables en évidence :

$$\frac{M_iH_i}{BP}=\frac{CM_i}{BC},\quad \frac{M_iK_i}{CQ}=\frac{BM_i}{BC}.$$

Faisons $BC=a$, $BP=h'$, $CQ=h''$, et soit l la longueur donnée; désignons par x le segment $\overline{BM_i}$ compté positivement dans le sens BC.

Pour $i=0$, on a l'équation

$$\frac{h'}{a}(a-x)+\frac{h''}{a}x=l,\quad \text{avec}\quad 0<x<a;$$

pour $i=1$, on a :

$$\frac{h'}{a}(a-x)-\frac{h''}{a}x=l,\quad \text{avec}\quad x<0;$$

pour $i=2$, on a :

$$\frac{h'}{a}(x-a)+\frac{h''}{a}x=l,\quad \text{avec}\quad x>a.$$

Il faut donc résoudre chacune des équations précédentes. La première donne

$$x=\frac{a(h'-l)}{h'-h''}.$$

Cette solution convient au problème si la valeur de x est positive et inférieure à a. Supposons $h' > h''$, comme nous pouvons le faire si le triangle n'est pas isocèle : alors cette solution convient si l'on a $h' > l > h''$, et seulement dans ce cas. Si le triangle était isocèle, on aurait $h' = h''$; le problème n'aurait pas de solution telle que M_0, sauf si l'on avait $l = h' = h''$: alors tout point de la base BC compris entre B et C répondrait à la question; il y aurait indétermination.

La seconde équation donne :

$$x = \frac{a(h' - l)}{h' + h''}.$$

Cette solution convient au problème si la valeur de x est négative, c'est-à-dire si l'on a $l > h'$, et seulement dans ce cas.

Enfin, la troisième équation donne :

$$x = \frac{a(h' + l)}{h' + h''};$$

cette solution convient au problème si la valeur de x est supérieure à a, ce qui exige $l > h''$.

Si nous résumons cette discussion nous voyons que :

1° Si l'on a $h' > h''$, le problème a deux solutions telles que M_1 et M_2, si l'on a $l > h'$; il en a deux encore telles que M_0 et M_2, si l'on a $h' > l > h''$; il n'en a aucune si l'on a $l < h''$. On dit alors que h'' est le *minimum* de l, c'est-à-dire la plus petite des valeurs que peut prendre l.

2° Si l'on a $h' = h''$, c'est-à-dire si le triangle est isocèle de sommet A, on a deux solutions telles que M_1 et M_2, si l'on a $l > h'$; on a une infinité de solutions telles que M_0, si l'on a $l = h'$; enfin, on n'a aucune solution si l'on a $l < h'$.

Remarque. — Il est trop facile de dire ce qui arrive quand l est égal à l'une des quantités h' ou h'' pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ces cas.

PROBLÈME XXVI

128. — Etant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite X'X, trouver un point M sur X'X tel que le produit des segments $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ soit égal au produit des segments $\overline{MC}$ et $\overline{MB}$ (*fig.* 26).

Comptons les segments dans le sens X'X à partir d'un

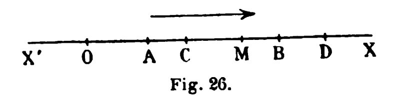


Fig. 26.

point O, et soient a, b, c, d, x les abcisses des points A, B, C, D, M. Quelle que soit la disposition de la figure, l'énoncé donne l'équation

$$(a - x)\ (b - x) = (c - x)\ (d - x),$$

d'où

$$x = \frac{ab - cd}{a + b - c - d}.$$

Il y a donc un point M répondant à la question.

Si $a + b - c - d$ est nul, sans que $ab - cd$ le soit, il y a impossibilité; le point M s'éloigne à l'infini si l'on considère a, b, c, d comme des quantités variables et si $a + b - c - d$ tend vers zéro.

Si $a + b - c - d$ et $ab - cd$ sont nulles toutes deux, il y a indétermination; tout point M de X'X répond à la question.

Il est facile de voir ce que signifient ces conditions.

Supposons que le point O soit en A; alors $a = 0$, et ces conditions deviennent $b - c - d = 0$ avec $cd = 0$. Donc l'un des nombres c et d doit être nul, c par exemple, de sorte que C coïncide avec A; alors il reste $b - d = 0$, ce qui exprime que D coïncide avec B. Il n'y a donc indétermination que si les points C et D coïncident respectivement avec les points A et B.

Quand il y a impossibilité, on a :

$$a + b - c - d = 0,$$

ou

$$\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2};$$

donc les milieux des segments de droite AB et CD coïncident.

On peut encore supposer que l'un des points donnés, A par exemple, s'éloigne indéfiniment sur X'X; alors x prend la valeur b; donc, dans ce cas, M vient en B.

Si les deux points associés A et B s'éloignent tous deux à l'infini, il en est de même de M. Si deux points non associés, tels que A et C, s'éloignent tous deux à l'infini, M devient indéterminé.

Problème XXVII

Soit un système d'axes de coordonnées OX, OY et deux droites AB, A'B', ne passant pas en O ; on demande de calculer les coordonnées de leur point M d'intersection (*fig.* 27).

Si l'on appelle a et a', b et b' les segments $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$, et si x et y sont les coordonnées du point M, on sait, d'après le n° **54**, que les inconnues x et y doivent vérifier les deux relations

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0, \\ \dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b'} - 1 = 0. \end{cases}$$

Ces équations résolues donnent :

$$\begin{cases} x = \dfrac{aa'(b'-b)}{ab'-a'b}, \\ y = \dfrac{bb'(a-a')}{ab'-ba'}. \end{cases}$$

Telles sont les formules qui résolvent la question.

Si l'on a $ab' - ba' = 0$, sans avoir $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, le problème est impossible; en effet, on voit tout de suite que les deux droites sont alors parallèles. Si a, a', b, b' sont des quantités variables, et si $ab' - ba'$ tend vers zéro, le point M d'intersection des deux droites s'éloigne indéfiniment, parce que les deux droites tendent à devenir parallèles.

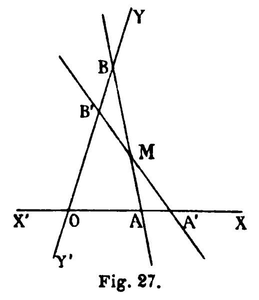


Fig. 27.

Si l'on a $ab' - ba' = 0$, avec $a - a' = 0$, on a aussi $b - b' = 0$; le point M est indéterminé, et, en effet, alors les deux droites données coïncident; x et y sont liées par la seule relation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Si a devient infini, la droite AB devient parallèle à OX, et l'on trouve

$$\begin{cases} x = \dfrac{a'(b' - b)}{b'}, \\ y = b. \end{cases}$$

On raisonnera de même si quelque autre des quantités a', b, b' devient infinie.

Problème XXVIII

129. — Etant donné un triangle ABC, construire un rectangle PQRS, inscrit ou exinscrit à ce triangle dans l'angle A, c'est-à-dire dont deux sommets P, Q soient sur BC, et les deux autres R et S sur AC et AB, connaissant le périmètre de ce rectangle (*fig.* 28).

On peut avoir trois figures différentes suivant que le rectangle occupe une position telle que $P_0Q_0R_0S_0$ (et alors

il est véritablement inscrit), ou une position telle que $P_1Q_1R_1S_1$ ou $P_2Q_2R_2S_2$ (et alors il est exinscrit). Soit AH la hauteur du triangle qui rencontre R_iS_i en K_i.

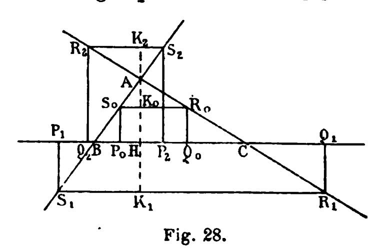


Fig. 28.

Pour construire la figure, il suffit de connaître AK_i.

Appelons x le segment $\overline{AK_i}$ compté dans le sens AH, a la base BC du triangle, h sa hauteur AH, $2p$ le périmètre donné.

Pour l'indice 0, on a :

$$P_0S_0 = h - x, \quad \frac{R_0S_0}{a} = \frac{x}{h},$$

et par suite l'équation du problème est

$$h - x + \frac{ax}{h} = p, \quad \text{avec} \quad 0 < x < h.$$

Pour l'indice 1, on a :

$$P_1S_1 = x - h, \quad \frac{R_1S_1}{a} = \frac{x}{h},$$

et par suite l'équation du problème est

$$x - h + \frac{ax}{h} = p, \quad \text{avec} \quad x > h.$$

Pour l'indice 2, on a :

$$P_2S_2 = h - x, \quad \frac{R_2S_2}{a} = \frac{-x}{h},$$

et par suite l'équation du problème est

$$h - x - \frac{ax}{h} = p, \quad \text{avec } x < 0.$$

Il faut résoudre chacune des équations précédentes.

La première donne :

$$x=\frac{h(p-h)}{a-h}.$$

Cette solution convient au problème si la valeur de x est positive et inférieure à h. Distinguons alors trois cas :

1° On a $a > h$; dans ce cas il faut $a > p > h$.

2° On a $a < h$; alors il faut $a < p < h$.

3° On a $a = h$; alors le problème est impossible sauf si l'on a $p = h$; dans ce cas, il y a indétermination : toute valeur de x positive et inférieure à h répond à la question.

La seconde équation donne :

$$x=\frac{h(p+h)}{a+h}.$$

Cette solution convient au problème si la valeur de x est supérieure à h, ce qui exige $p > a$.

La troisième équation donne enfin :

$$x=\frac{h(h-p)}{a+h},$$

valeur qui convient si elle est négative, ce qui exige $p > h$.

En résumé nous voyons que :

1° Si l'on a $a > h$, le problème a deux solutions telles que $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_2Q_2R_2S_2$ si p est supérieur à a; il a encore deux solutions telles que $P_0Q_0R_0S_0$ et $P_2Q_2R_2S_2$ si p est compris entre a et h; il n'en a aucune si p est plus petit que h : h est le minimum de p.

2° Si l'on a $a < h$, le problème a deux solutions telles que $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_2Q_2R_2S_2$ si p est supérieur à h; il a encore deux solutions telles que $P_0Q_0R_0S_0$ et $P_1Q_1R_1S_1$ si p est compris entre a et h; il n'en a aucune si p est plus petit que a : a est le minimum de p.

3° Si l'on a $a = h$, le problème a deux solutions telles que $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_2Q_2R_2S_2$ si p est supérieur à a; il en a

une infinité telles que $P_0Q_0R_0S_0$ si p est égal à a; il n'en a aucune si p est inférieur à a.

PROBLÈME XXIX

Etant donné un triangle ABC, construire un rectangle PQRS, inscrit ou exinscrit à ce triangle dans l'angle A, dont le rapport des dimensions PS et PQ ait une valeur donnée (*fig.* 28).

La figure peut présenter les mêmes dispositions que dans le problème précédent; gardant donc les mêmes notations et appelant k le rapport donné, on doit avoir l'équation :

$$\frac{P_iS_i}{P_iQ_i} = k.$$

Donc pour un rectangle $P_0Q_0R_0S_0$, on a l'équation :

$$\frac{h - x}{\frac{ax}{h}} = k,$$

qui donne :

$$x = \frac{h^2}{h + ak};$$

cette valeur convient si elle est positive et inférieure à h, ce qui a toujours lieu.

Pour un rectangle tel que $P_1Q_1R_1S_1$, on a l'équation

$$\frac{x - h}{\frac{ax}{h}} = k,$$

qui donne :

$$x = \frac{h^2}{h - ak};$$

cette valeur convient si elle est supérieure à h, ce qui exige $h - ak > 0$, ou $k < \frac{h}{a}$.

Pour un rectangle tel que $P_2Q_2R_2S_2$, on a l'équation

$$\frac{h-x}{-\frac{x}{h}}=k,$$

qui est la même que la précédente, et qui donne par suite

$$x=\frac{h^2}{h-ak};$$

cette valeur convient si elle est négative, ce qui exige $k>\frac{h}{a}$.

En résumé, le problème a toujours deux solutions, l'une telle que $P_0Q_0R_0S_0$, l'autre telle que $P_1Q_1R_1S_1$ ou $P_2Q_2R_2S_2$ suivant que l'on a $k<\frac{h}{a}$ ou $k>\frac{h}{a}$. Si l'on avait $k=\frac{h}{a}$, cette dernière solution disparaîtrait.

Si, en particulier, il faut inscrire ou exinscrire au triangle ABC un carré dans l'angle A, on a $k=1$; le problème a deux solutions dont l'une disparaît si l'on a $a=h$.

Problème XXX

Étant donné un rectangle ABCD, prendre sur les quatre côtés quatre points P, Q, R, S, tels que les segments $\overline{AP}$ et $\overline{CR}$ comptés dans les sens AB et CD, étant égaux entre eux, de même que les segments $\overline{AS}$ et $\overline{CQ}$ comptés dans les sens AD et CB, la figure PQRS soit un rectangle, dont le rapport des dimensions PS et PQ ait une valeur donnée (*fig.* 29).

En prenant les points P, Q, R, S comme l'indique l'énoncé, la figure peut présenter neuf dispositions différentes reproduites ci-contre : $P_0Q_0R_0S_0$, $P_1Q_1R_1S_1$, ..., $P_8Q_8R_8S_8$.

Dans tous les cas, la figure $P_iQ_iR_iS_i$ est un parallélogramme et ne peut être un rectangle que pour $i=0$,

$i=3$, $i=5$, $i=7$ et $i=8$. D'ailleurs dans ces cas, pour qu'elle soit un rectangle, il faut et il suffit que les trian-

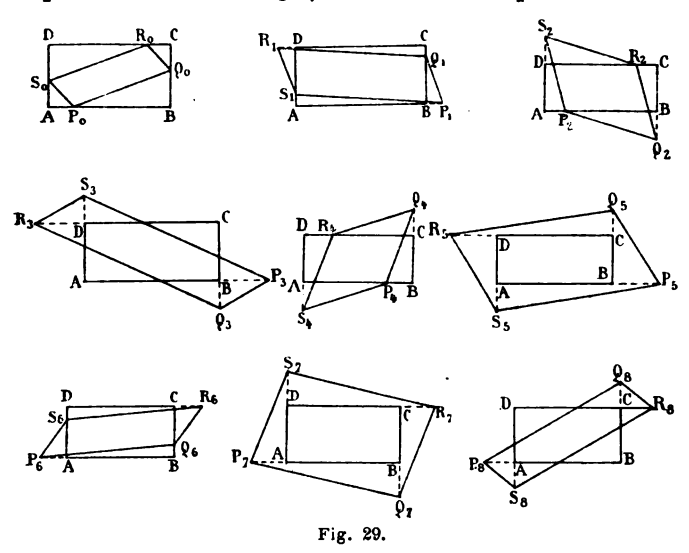


Fig. 29.

gles AP_iS_i, BP_iQ_i soient semblables, et l'on a les relations :

$$\frac{P_iS_i}{P_iQ_i}=\frac{AP_i}{BQ}=\frac{AS_i}{BP_i},$$

d'où, en appelant k le rapport donné, les équations

$$\begin{cases} AP_i=kBQ_i, \\ AS_i=kBP_i. \end{cases}$$

Appelons a et b les dimensions AB et AD du rectangle donné, x et y les segments $\overline{AP_i}$, $\overline{AS_i}$ comptés dans les sens AB et AD.

Pour la figure $P_0Q_0R_0S_0$, on a :

$$(1)\quad \begin{cases} x=k(b-y), \\ y=k(a-x), \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0<x<a, \\ 0<y<b. \end{cases}$$

Les mêmes équations conviennent à la figure $P_7Q_7R_7S_7$

avec $x < 0$, et $y > b$, et aussi à la figure $P_5Q_5R_5S_5$ avec $x > a$ et $y < 0$.

Pour la figure $P_3Q_3R_3S_3$, on a :

$$2) \quad \begin{cases} x = k(y-b), \\ y = k(x-a), \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x > a, \\ y > b. \end{cases}$$

Les mêmes équations conviennent à la figure $P_8Q_8R_8S_8$ avec $x < 0$, $y < 0$.

Il faut résoudre et discuter les deux systèmes de deux équations simultanées (1) et (2).

Le système (1) donne :

$$x = \frac{k(b-ak)}{1-k^2}, \quad y = \frac{k(a-bk)}{1-k^2}.$$

Supposons $a > b$.

On aura une solution $P_0Q_0R_0S_0$, si l'on a $k < \frac{b}{a}$ ou $k > \frac{a}{b}$.

On aura une solution $P_7Q_7R_7S_7$, si l'on a $\frac{b}{a} < k < 1$.

On aura une solution $P_5Q_5R_5S_5$, si l'on a $1 < k < \frac{a}{b}$.

On a donc toujours une de ces trois solutions, et une seule.

Pour $k = 1$, le problème est impossible, sauf si $a = b$; alors il est indéterminé : x et y sont liés par l'unique relation $x + y = a$.

Le système (2) donne :

$$x = \frac{-k(b+ak)}{1-k^2}, \quad y = \frac{-k(a+bk)}{1-k^2}.$$

On a une solution $P_3Q_3R_3S_3$, si l'on a $k > 1$, et une solution $P_8Q_8R_8S_8$, si l'on a $k < 1$.

On a donc toujours une de ces deux solutions, et une seule.

Pour $k = 1$, le problème est impossible.

Finalement, on voit que le problème a toujours deux solutions.

Exercices

N. B. — Les exercices proposés au livre V du *Cours d'arithmétique* devront être résolus par les méthodes de l'algèbre.

1. — Partager le nombre 84 en deux parties telles que le huitième de l'une plus le cinquième de l'autre fasse 50.

2. — Partager 5 397fr,45 entre trois personnes, de façon que la première ait 287 francs de plus que la seconde, et que la part de la troisième dépasse de 612 francs la somme des parts des deux autres.

3. — On a acheté trois objets pour 1 895 francs ; le premier vaut les 2/3 du prix du second, qui coûte lui-même autant que les deux premiers. Quel est le prix de chaque objet?

4. — Trouver quatre nombres en proportion, sachant qu'ils dépassent tous d'une même quantité quatre nombres donnés a, b, c, d. Application : $a = -5$, $b = 40$, $c = 10$, $d = 100$.

5. — Les âges de deux personnes sont a et b; à quelle époque le rapport de leurs âges est-il un nombre donné k?

6. — Une personne augmente chaque année sa fortune du quart de sa valeur, et dépense 5000 francs par an ; à la fin de la quatrième année, sa fortune est doublée ; quelle était sa valeur primitive ?

7. — A quelles heures les deux aiguilles d'une montre sont-elles sur le prolongement l'une de l'autre ?

8. — Sur un côté d'un triangle trouver un point dont la différence des distances aux deux autres côtés soit égale à une longueur donnée.

9. — Même question quand le rapport des distances est donné.

10. — Inscrire ou exinscrire à un triangle un rectangle dont la différence des deux dimensions ait une valeur donnée.

11. — Par un point de la base d'un triangle on mène des parallèles aux deux autres côtés, limitées à ces côtés. Quelle est la position de ce point quand la somme de ces deux parallèles a une valeur donnée ?

12. — Même question quand la différence des deux parallèles est donnée.

13. — Même question quand le rapport des deux parallèles est donné.

14. — Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que ses distances aux trois côtés soient proportionnelles à des nombres donnés.

15. — Trouver sur la base AB d'un trapèze ABCD un point M

tel que le rapport des aires du triangle CMD et du trapèze AMCD ait une valeur donnée.

16. — Sur une demi circonférence AMB, trouver un point M tel que si l'on mène la tangente MP jusqu'à sa rencontre avec le diamètre AB, les volumes engendrés par le secteur AOM et par le triangle OMB tournant autour de AB soient dans un rapport donné.

17. — Trouver sur une perpendiculaire à une droite D un point équidistant de cette droite et d'un point fixe donné.

18. — Trouver sur une droite donnée un point M tel que l'aire du triangle AMB ait une valeur donnée, A et B étant deux points fixes donnés.

19. — Les trois côtés d'un triangle sont *a*, *b*, *c*; de combien faut-il augmenter ou diminuer les côtés *b* et *c* pour que le triangle formé par *a* et les nouveaux côtés soit rectangle, *a* étant un des côtés de l'angle droit?

20. — On donne deux droites Ox, Oy et un point M; mener par ce point une droite rencontrant Ox et Oy en A et B, telle que le rapport $\frac{OA}{OB}$ ait une valeur donnée.

LIVRE III

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE. ÉQUATION BICARRÉE. SYSTÈMES DU SECOND DEGRÉ

§ 1er. — Résolution de l'équation du second degré à une inconnue.

130. — L'équation du second degré à une inconnue se présente sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a, b, c étant des nombres ou bien des expressions algébriques dépendant des paramètres, suivant que l'équation est numérique ou littérale ; dans tous les cas, le coefficient a n'est pas nul.

Si c est nul sans que b le soit, comme on a :

$$ax^2 + bx \equiv x(ax + b),$$

l'équation admet les deux racines $x = 0$ et $x = -\frac{b}{a}$, et n'en admet pas d'autres.

Si b est nul sans que c le soit, l'équation peut s'écrire sous la forme

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Si le nombre $\frac{c}{a}$ est positif, c'est-à-dire si a et c sont de

même signe, l'équation n'a pas de racines, puisque le carré d'un nombre est toujours positif.

Si le nombre $\frac{c}{a}$ est négatif, c'est-à-dire si a et c sont de signes contraires, l'équation s'écrit sous la forme

$$\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0,$$

et par suite (**103**) elle admet les deux racines

$$\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[3]{-\frac{c}{a}}.$$

On écrit, comme au n° **45**,

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Si b et c sont nuls tous deux, l'équation a l'unique racine $x=0$; on dit, pour des raisons que nous expliquerons tout à l'heure, qu'elle a une racine *double* égale à zéro.

131. — Dans le cas général, écrivons d'abord l'équation sous la forme

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

et remarquons que l'on a l'identité

$$x^2+\frac{b}{a}x\equiv\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}.$$

L'équation devient ainsi, en considérant ses deux premiers termes comme ceux d'un carré,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

ou

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Cela étant :

1° Si la quantité $b^2 - 4ac$ est négative, la quantité $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est positive, et l'équation n'a évidemment aucune racine, puisque le carré d'un nombre est toujours positif.

2° Si la quantité $b^2 - 4ac$ est positive, on peut écrire l'équation sous la forme

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0,$$

et par suite (**103**) elle admet les deux solutions

$$-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

puisqu'on est ramené à la résolution de deux équations du premier degré dont les racines sont en évidence. On écrit :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Quand nous voudrons distinguer les deux racines, nous appellerons x' celle qui correspond au signe — devant le radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$, et x'' celle qui correspond au signe $+$ devant ce radical, de sorte que

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La racine x' est la plus petite ou la plus grande des deux racines suivant que a est positif ou négatif.

3° Si la quantité $b^2 - 4ac$ est nulle, le nombre $x + \frac{b}{2a}$ doit être nul, et par suite l'équation a une seule racine :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

On dit alors que l'équation a une *racine double* ou *deux racines égales*, parce que si a, b, c sont des quantités va-

riables, et si la quantité $b^2 - 4ac$ tend vers zéro en restant positive, l'équation admet deux racines qui tendent toutes deux vers la même quantité $-\frac{b}{a}$, comme le montrent les formules établies précédemment.

Cette convention nous permettra plus tard de donner plus de généralité aux énoncés.

En résumé :

1° Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a pas de racines;

2° si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation a deux racines distinctes;

3° si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a deux racines confondues.

La quantité $b^2 - 4ac$ est la *quantité sous le radical* pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On voit aisément que ce que nous venons de dire s'applique aux cas particuliers déjà examinés.

132. — Souvent le coefficient a est égal à 1 ; alors la quantité sous le radical est $b^2 - 4c$; si elle n'est pas négative, on a :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Souvent encore, le coefficient b se présente sous la forme $2b'$; alors la quantité sous le radical est $4b'^2 - 4ac$ ou $4(b'^2 - ac)$, de sorte que

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 2\sqrt{b'^2 - ac},$$

quand $b'^2 - ac$ n'est pas négative.

On appelle alors $b'^2 - ac$ la quantité sous le radical, et si cette quantité n'est pas négative, la formule de résolution devient :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Si en particulier $a = 1$, on a simplement :

$$x = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}.$$

Reprenons la formule générale

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

en multipliant haut et bas par $-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}$, il vient

$$x = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

En particulier, on a :

$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Ces formules sont commodes dans certains cas.

Exemples. — 1° Résoudre l'équation

$$3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

La quantité sous le radical, $b'^2 - ac$, est $4 - 15$; elle est négative; il n'y a pas de racines.

2° Résoudre l'équation

$$5x^2 + 7x - 12 = 0.$$

La quantité sous le radical, $b^2 - 4ac$, est $49 + 4 \times 5 \times 12$ ou 289.

L'équation a deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-7 - \sqrt{289}}{10}, \qquad x'' = \frac{-7 + \sqrt{289}}{10};$$

or $\sqrt{289} = 17$; donc

$$x' = \frac{-12}{5}, \qquad x'' = 1.$$

3° Résoudre l'équation

$$-3x^2 + 6x + 9 = 0.$$

La quantité sous le radical, $b'^2 - ac$, est $9 + 27$ ou 36. On a deux racines :

$$x' = \frac{-3 - \sqrt{36}}{-3} = 3 ; \qquad x'' = \frac{-3 + \sqrt{36}}{-3} = -1.$$

4° Résoudre l'équation

$$x^2 + (p - q)x - pq = 0.$$

La quantité sous le radical, $b^2 - 4ac$, est $(p - q)^2 + 4pq$ ou $(p + q)^2$; l'équation a deux racines :

$$x = \frac{-(p - q) \pm \sqrt{(p + q)^2}}{2}.$$

Ces deux racines sont $-p$ et q.

5° Résoudre l'équation

$$(1 + m)x^2 - 2mx + (m - 3) = 0.$$

La quantité sous le radical, $b'^2 - a'c'$, est

$$m^2 - (1 + m)(m - 3)$$

ou

$$2m + 3.$$

Si elle est négative, c'est-à-dire si $m < -\frac{3}{2}$, l'équation n'a pas de racines; si elle est positive, c'est-à-dire si $m > -\frac{3}{2}$, l'équation a deux racines données par la formule

$$x = \frac{m \pm \sqrt{2m + 3}}{1 + m} ;$$

si elle est nulle, c'est-à-dire si $m = -\frac{3}{2}$, l'équation a une racine double :

$$x = \frac{m}{1 + m} = 3.$$

133. — Si l'équation est littérale, les paramètres pourront recevoir des valeurs particulières, telles que quelques-unes des quantités a, b, c, ou bien x' et x'', n'aient pas de valeurs numériques directement calculables ; et si lorsque les paramètres

tendent vers ces valeurs particulières, l'équation a toujours deux racines, on pourra encore parler des racines de l'équation, même quand les paramètres reçoivent ces valeurs singulières, en appliquant les conventions faites antérieurement, toujours de la même façon.

Supposons, par exemple, que a, b, c étant des paramètres, b et c aient des valeurs finies non nulles, et que a reçoive la valeur zéro.

Quand a tend vers zéro, $b^2 - 4ac$ est une quantité positive évidemment, et l'équation a deux racines.

Distinguons deux cas :

1° $b > 0$; considérons la racine x'; la formule

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

prend la forme $x' = \frac{-2b}{0}$ pour $a = 0$, et par suite la racine x' devient infinie.

Considérons maintenant x''; la formule

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

prend la forme $x'' = \frac{0}{0}$, pour $a = 0$, et ne nous apprend rien ; mais on a aussi

$$x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

et par suite, pour $a = 0$,

$$x'' = -\frac{c}{b}.$$

2° $b < 0$; cette fois $\sqrt{b^2 - 4ac}$ prenant la valeur $-b$ pour $a = 0$, c'est la racine x'' qui devient infinie, tandis que la racine x' devient égale à $-\frac{c}{b}$.

Donc, dans tous les cas, l'une des racines devient infinie, tandis que l'autre prend la valeur $-\frac{c}{b}$; cette valeur est précisément, comme on devait s'y attendre, la racine de l'équation

$$bx + c = 0,$$

que l'on obtient en faisant $a = 0$ dans l'équation générale.

§ 2. — Relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré.

134. — *Si l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *a deux racines distinctes ou égales, la somme de ces deux racines est égale à* $-\frac{b}{a}$, *et leur produit est égal à* $\frac{c}{a}$.

En effet, on a :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

d'où en additionnant membre à membre

$$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

et en multipliant membre à membre

$$x'x'' = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

135. — Ce théorème est fort important : nous en ferons des applications à chaque instant.

Proposons-nous d'abord la question suivante :

A la seule inspection des signes des coefficients a, b, c *de l'équation du second degré, reconnaître quels sont les signes des deux racines, et quand ces racines sont de signes contraires, quelle est la plus grande en valeur absolue, en supposant, bien entendu, l'existence de ces racines.*

Si la quantité $\frac{c}{a}$ est positive, c'est-à-dire si les coefficients extrêmes a et c de l'équation sont de même signe, on calculera la quantité $b^2 - 4ac$ afin de savoir si les racines existent; supposant cette quantité non négative, l'équation a deux racines x' et x'' dont le produit est la quantité positive $\frac{c}{a}$; donc ces racines sont de même signe. Ce signe sera évidemment celui de leur somme, c'est-

à-dire le signe de $-\frac{b}{a}$, ou le signe contraire de celui de $\frac{b}{a}$.

Si la quantité $\frac{c}{a}$ est négative, c'est-à-dire si les coefficients extrêmes a et c sont de signes contraires, il est inutile de calculer la quantité $b^2 - 4ac$: car le produit ac étant négatif, cette quantité est positive nécessairement.

L'équation a donc certainement deux racines x' et x'' dont le produit est la quantité négative $\frac{c}{a}$; ces racines sont par suite de signes contraires ; la plus grande en valeur absolue a le signe de leur somme $-\frac{b}{a}$.

Exemples. — 1° Soit l'équation

$$x^2 + 3x + 5 = 0.$$

On a $b^2 - 4ac = -11$; l'équation n'a pas de racines.

2° Soit l'équation

$$x^2 + 5x + 3 = 0.$$

On a $b^2 - 4ac = 13$; l'équation a deux racines de même signe et négatives.

3° L'équation

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

a de même deux racines positives; car $b^2 - 4ac = 13$, et $\frac{c}{a}$ ainsi que $\frac{b}{a}$ sont des quantités positives.

4° L'équation

$$x^2 + 5x - 3 = 0$$

a deux racines de signes contraires; la plus grande en valeur absolue est négative.

5° L'équation

$$x^2 - 5x - 3 = 0$$

a deux racines de signes contraires; la plus grande en valeur absolue est positive.

6° Etudier les signes des racines de l'équation

$$(1+m)x^2 - 2mx + (m-3) = 0$$

quand m prend toutes les valeurs possibles.

On a d'abord :

$$b'^2 - ac = 2m + 3,$$

et les racines n'existent que si l'on a $m > -\frac{3}{2}$.

Le produit des racines est $\frac{m-3}{m+1}$; les deux racines seront de même signe si l'on a :

$$\frac{m-3}{m+1} > 0, \quad \text{avec } m > -\frac{3}{2}.$$

L'inégalité $\frac{m-3}{m+1} > 0$ ou $(m-3)(m+1) > 0$ est vérifiée pour $m < -1$ et $m > 3$; donc les deux racines seront de même signe pour $-\frac{3}{2} < m < -1$, et pour $m > 3$; elles seront de signes contraires pour $-1 < m < 3$.

La somme des racines est $\frac{2m}{1+m}$; cette quantité est positive pour $m < -1$ et $m > 0$, négative pour $-1 < m < 0$. Donc finalement :

pour $m < -\frac{3}{2}$, pas de racines;

pour $-\frac{3}{2} < m < -1$, deux racines positives;

pour $-1 < m < 0$, deux racines de signes contraires; la racine négative est la plus grande en valeur absolue;

pour $0 < m < 3$, deux racines de signes contraires; la racine positive est la plus grande en valeur absolue;

pour $3 < m$, deux racines positives.

Examinons maintenant les cas particuliers :

pour $m = -\frac{3}{2}$, deux racines égales positives;

pour $m = -1$, une racine infinie et une racine positive;

pour $m = 0$, deux racines égales et de signes contraires;

pour $m = 3$, une racine nulle.

Cherchons encore ce que deviennent les racines de l'équation proposée pour $m = +\infty$.

On a :

$$x = \frac{m \pm \sqrt{2m+3}}{1+m} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{3}{m^2}}}{1 + \frac{1}{m}},$$

et par suite, pour $m = +\infty$, les deux racines deviennent égales à 1.

136. — Toute expression dépendant des racines x' et x'', et pouvant s'exprimer à l'aide de $x' + x''$ et $x'x''$, s'exprimera aisément à l'aide des coefficients de l'équation.

Ainsi, on a :

$$x'^2 + x''^2 \equiv (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2};$$

$$x'^3 + x''^3 \equiv (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$$
$$= \frac{b(3ac - b^2)}{a^3};$$

$$x'^4 + x''^4 \equiv (x'^2 + x''^2)^2 - 2x'^2x''^2 = \frac{(b^2 - 2ac)^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$
$$= \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4};$$

$$\frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} \equiv \frac{x'^4 + x''^4}{x'^4x''^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4};$$

$$\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}=\frac{x'^2+x''^2}{x'x''}=\frac{b^2-2ac}{ac};$$

et ainsi de suite.

Remarquons aussi que l'on a :

$$x''-x'=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

et que par suite on a par exemple :

$$x''^2-x'^2=(x''-x')(x''+x')=\frac{-b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2},$$

$$x''^3-x'^3=(x''-x')(x''^2+x'x''+x'^2)$$
$$=\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}, \quad \text{etc.}$$

§ 3. — Résolution de l'inégalité du second degré. Comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré.

137. — Toute inégalité du second degré à une inconnue peut se ramener à la forme

$$ax^2+bx+c>0;$$

cette inégalité devient elle-même en raisonnant comme au n° **131** :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]>0;$$

si la quantité b^2-4ac est négative, la quantité entre crochets est toujours positive : donc l'inégalité est vérifiée pour toute valeur de x, si a est positif; elle ne l'est pour aucune valeur de x, si a est négatif.

Si la quantité b^2-4ac est nulle, l'inégalité est vérifiée pour toute valeur de x, si a est positif, sauf pour $x=-\frac{b}{a}$: alors il y a égalité. Si a est négatif, l'inégalité n'est vérifiée pour aucune valeur de x.

Si la quantité $b^2 - 4ac$ est positive, l'inégalité s'écrit sous la forme

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) > 0,$$

ou, en appelant x' et x'' les racines distinctes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$,

$$a(x - x'')(x - x') > 0.$$

Si a est une quantité positive, ceci revient à

$$(x - x'')(x - x') > 0;$$

d'ailleurs, on a $x'' > x'$, et par suite (111) l'inégalité est vérifiée pour les valeurs de x satisfaisant à l'une des conditions

$$x > x'' \quad \text{ou} \quad x < x'.$$

Si a est une quantité négative, l'inégalité proposée revient à

$$(x - x'')(x - x') < 0;$$

d'ailleurs, on a $x'' < x'$, et par suite (111) l'inégalité est vérifiée pour les valeurs de x satisfaisant à la condition

$$x'' < x < x'.$$

De là résultent immédiatement les propositions fondamentales suivantes :

1° *Si l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *n'a pas de racines, le trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$ *a toujours le signe de* a, *quelle que soit la valeur attribuée à* x;

2° *Si l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *a une racine double, le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *a toujours le signe de* a, *quelle que soit la valeur attribuée à* x, *sauf pour* $x = -\frac{b}{2a}$ *: le trinôme est alors nul.*

3° *Si l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *a deux racines distinctes, le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *a le signe de* a *quand* x *est supérieur à la plus grande de ces racines ou inférieur à la plus petite; il a le signe contraire de celui de* a

quand x *est compris entre les deux racines; il est nul quand* x *est égal à une de ces racines.*

Exemples. — 1° Le trinôme x^2+x+1 est toujours positif, car l'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de racines.

2° Le trinôme $-8x^2+17x-9$ est positif pour $1<x<\frac{9}{8}$, et négatif pour $x<1$ et $x>\frac{9}{8}$, parce que l'équation $-8x^2+17x-9=0$ a pour racines 1 et $\frac{9}{8}$.

3° Montrer que x, y, z étant des nombres différents, la quantité

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$$

est toujours positive.

Considérons cette quantité comme un trinôme du second degré en x :

$$x^2-(y+z)x+y^2-yz+z^2.$$

La quantité sous le radical b^2-4ac est ici

$$(y+z)^2-4(y^2-yz+z^2),$$

ou

$$-3y^2-3z^2+6yz,$$

ou encore

$$-3(y-z)^2;$$

c'est donc une quantité négative, et par suite le trinôme a toujours le signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire le signe $+$.

138. — Appliquons ce qui précède à résoudre la question suivante :

Comparer un nombre m *aux racines d'une équation* $ax^2+bx+c=0$, *sans résoudre cette équation; on suppose bien entendu l'existence de ces racines.*

Substituons m dans le premier membre de l'équation donnée, à la place de x, c'est-à-dire calculons la quantité

$$M=am^2+bm+c.$$

1° Si cette quantité est de signe contraire à celui de a,

c'est que l'équation donnée a des racines distinctes, et que m est compris entre ces racines; en effet, dans tout autre cas, pour $x=m$, le trinôme aurait le signe de a.

2° Si cette quantité M a même signe que a, et si l'équation a des racines, il est clair que m est ou bien plus petit que la plus petite racine, ou bien plus grand que la plus grande racine.

Pour distinguer entre ces deux cas, on remarquera que si m est plus petit que la plus petite racine, il est aussi plus petit que la plus grande, et par suite plus petit que la demi-somme des deux racines; car la demi-somme de deux nombres est toujours plus grande que le plus petit de ces nombres; de même si m est plus grand que la plus grande racine, il est aussi plus grand que la plus petite, et par suite plus grand que la demi-somme des deux racines.

Il suffira donc de comparer m à la demi-somme $-\frac{b}{2a}$ des racines : selon que m sera inférieur ou supérieur à $-\frac{b}{2a}$, le nombre sera inférieur à la plus petite racine ou supérieur à la plus grande racine.

Ces règles sont de la plus haute importance : ce sont elles seules qui servent à faire la discussion des problèmes du second degré, comme nous le verrons plus loin.

Exemples. — 1° Comparer le nombre 3 aux racines de l'équation

$$2x^2-5x+1=0.$$

Le nombre 3 substitué à x dans le premier membre donne le résultat 4. D'ailleurs l'équation a deux racines, car la quantité sous le radical est 17. Enfin 3 est supérieur à $\frac{5}{2}$ demi-somme des racines; donc 3 est supérieur à la plus grande racine.

2° Comparer 3 aux racines de l'équation

$$2x^2-15x+1=0.$$

Le résultat de substitution de 3 est -26; donc l'équation a deux racines qui comprennent entre elles le nombre 3.

139. — Une inégalité de la forme

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}>0$$

se ramène à l'inégalité du second degré; car elle est équivalente à

$$(ax+b)(a'x+b')>0.$$

Une inégalité de la forme

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}>0$$

est facile à résoudre; en effet elle est équivalente à

$$(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')>0.$$

Si les deux équations

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

n'ont pas de racines, le produit

$$(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')$$

a toujours le signe de aa'.

Si une seule des équations précédentes, la seconde par exemple, n'a pas de racines, et si x', x'' sont les racines de la première, le produit $(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')$ a le signe de $aa'(x-x')(x-x'')$.

Si enfin les deux équations ci-dessus ont des racines, x', x'' pour la première, x'_1, x''_1 pour la seconde, le produit $(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')$ est égal à

$$aa'(x-x')(x-x'')(x-x'_1)(x-x''_1),$$

et l'on est ramené aux inégalités résolues au n° **111**.

On raisonnerait de même si l'on avait une inégalité de la forme

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}>0 \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c'}>0.$$

Exemple. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2}.$$

Elle est équivalente à celles-ci :

$$\frac{x(x+a)-2a(x-a)-8a^2}{x^2-a^2}>0,$$

$$(x^2-ax-6a^2)(x^2-a^2)>0,$$

$$(x-3a)(x+2a)(x+a)(x-a)>0.$$

Supposons $a>0$: l'inégalité est vérifiée pour

$$x<-2a, \quad -a<x<a, \quad 3a<x.$$

Si l'on a $a<0$, l'inégalité est vérifiée pour

$$x<3a, \quad a<x<-a, \quad -2a<x.$$

§ 4. — Equation bicarrée.

140. — Une équation *bicarrée* est une équation du quatrième degré qui ne contient que les puissances paires de l'inconnue; elle se présente donc sous la forme

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Pour la résoudre, on prend une inconnue auxiliaire

$$y=x^2.$$

On est ainsi amené, en remplaçant x^2 par y, au système équivalent

$$\begin{cases} ay^2+by+c=0, \\ x^2=y, \end{cases}$$

dans lequel la première équation est du second degré à une inconnue.

Si $b^2-4ac<0$, l'équation en y n'a pas de racines; le système est impossible, et l'équation bicarrée aussi.

Si $b^2-4ac=0$, l'équation en y a une racine égale à $-\frac{b}{2a}$; et par suite on est ramené à l'équation

$$x^2=-\frac{b}{2a};$$

si $-\frac{b}{2a}$ est négatif, c'est-à-dire si b et a sont de même signe, cette équation est impossible et par suite aussi l'équation bicarrée; si $-\frac{b}{2a}$ est positif, c'est-à-dire si b et a sont de signes contraires, l'équation bicarrée a deux racines

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation en y a deux racines y' et y'', et l'on est ramené aux deux équations

$$x^2 = y', \qquad x^2 = y''.$$

Si les coefficients a, b, c sont tous de même signe, ce qui entraîne

$$\frac{c}{a} > 0, \qquad \frac{b}{a} > 0,$$

es racines y' et y'' sont négatives, et par suite les équations ci-dessus sont impossibles de même que l'équation bicarrée.

Si le produit $\frac{c}{a}$ des racines y' et y'' est négatif, l'une de ces racines, y'' par exemple (si a est > 0), est positive; l'autre est négative; par suite l'équation $x^2 = y''$ est seule possible, et donne deux valeurs pour x :

$$x = \pm\sqrt{y''} \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Si a était négatif, on prendrait le signe $-$ devant $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Enfin si a et c sont de même signe, et si b est de signe contraire à celui-là, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{c}{a} > 0, \qquad \frac{b}{a} < 0,$$

les deux racines y' et y'' sont positives, et l'on a quatre valeurs pour x :

$$x = \pm\sqrt{y'}, \qquad x = \pm\sqrt{y''},$$

ou en une seule formule

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

L'équation bicarrée n'a donc pas de racines, ou bien en a deux égales et de signes contraires, ou bien en a quatre égales deux à deux et de signes contraires.

Les cas particuliers dans lesquels l'une des quantités b ou c est nulle sont faciles à examiner.

Exemples. — 1° Résoudre l'équation

$$x^4 + 5x^2 + 3 = 0.$$

Sans chercher lè signe de $b^2 - 4ac$, on voit que a, b, c sont de même signe; il n'y a pas de racines.

2° Résoudre l'équation

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

Ici, puisque c et a sont de signes contraires, $b^2 - 4ac$ est positif, et l'équation a deux racines seulement

$$x = \pm\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 + 4 \times 6}}{2}}.$$
$$= \pm 1.$$

3° Résoudre l'équation

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$$

Ici on a $b^2 - 4ac > 0$; en outre a et c sont de même signe, et b de signe contraire à celui-là; donc l'équation a quatre racines :

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2}},$$

c'est-à-dire

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{3}, \\ \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

4° Etudier la nature des racines de l'équation

$$(m+1)x^4 - 2mx^2 - (2m-3) = 0,$$

quand m prend toutes les valeurs possibles.

La quantité sous le radical $b'^2 - ac$ est ici

$$m^2 + (m+1)(2m-3)$$

ou

$$3m^2 - m - 3;$$

l'équation

$$3m^2 - m - 3 = 0$$

a deux racines

$$m' = \frac{1-\sqrt{37}}{6}, \quad m'' = \frac{1+\sqrt{37}}{6}.$$

Donc l'équation ne peut avoir de racines que si l'on a :

$$m \leqslant m', \qquad m \geqslant m''.$$

La quantité $\frac{c}{a}$, ou $-\frac{2m-3}{m+1}$, est positive quand on a :

$$-1 < m < \frac{3}{2};$$

elle est négative dans le cas contraire.

Enfin la quantité $\frac{b}{a}$, ou $-\frac{2m}{m+1}$, est positive quand on a :

$$-1 < m < 0;$$

elle est négative dans le cas contraire.

Le nombre $\frac{3}{2}$ substitué à la place de m dans $3m^2 - m - 3$ donne comme résultat $\frac{9}{4}$; par suite $\frac{3}{2}$ est supérieur à m'' ou inférieur à m'; mais, m' étant négatif, cette dernière hypothèse est absurde et l'on a :

$$\frac{3}{2} > m'',$$

ce que l'on aurait pu constater aussi par un calcul direct.

Le nombre -1 substitué à la place de m dans

$3m^2 - m - 3$ donne comme résultat 1, et par suite on voit comme plus haut que l'on a :

$$-1 < m'.$$

Cela posé, on voit que les diverses valeurs remarquables trouvées pour m se rangent en ordre croissant de la façon suivante :

$$-1, \quad m', \quad 0, \quad m'', \quad \frac{3}{2}.$$

Alors, pour $m < -1$, on a $\frac{c}{a} < 0$: l'équation a deux racines ;

pour $-1 < m < m'$, on a $b^2 - 4ac > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$: l'équation n'a pas de racines;

pour $m' < m < m''$, on a $b^2 - 4ac < 0$: l'équation n'a pas de racines;

pour $m'' < m < \frac{3}{2}$, on a $b^2 - 4ac > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{b}{a} < 0$: l'équation a quatre racines;

pour $\frac{3}{2} < m$, on a $\frac{c}{a} < 0$: l'équation a deux racines.

On verra aisément ce qui arrive dans les cas particuliers laissés de côté.

141. — Quand la quantité $\frac{c}{a}$ est positive, on peut résoudre directement l'équation bicarrée de la façon directe que voici. Mettons-la d'abord sous la forme

$$x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Supposons $\frac{b}{a} < 0$. Remarquons que l'on a:

$$x^4 + \frac{c}{a} \equiv \left(x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - 2x^2\sqrt{\frac{c}{a}};$$

l'équation devient ainsi, en considérant ses termes extrêmes comme ceux d'un carré,

$$\left(x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - \left(2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}\right)x^2 = 0.$$

la quantité $2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}$ est positive puisque l'on a $\frac{b}{a} < 0$, et l'équation peut encore s'écrire :

$$\left.\begin{array}{l}\left(x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} - x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right) \\ \left(x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} + x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}}\right)\end{array}\right\} = 0.$$

On est ainsi ramené à la résolution des deux équations du second degré

$$x^2 - x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0,$$

et
$$x^2 + x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0.$$

Ces équations n'ont de racines que si l'on a :

$$2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} - 4\sqrt{\frac{c}{a}} \geqslant 0,$$

ou

$$-\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a}},$$

ou en élevant au carré, ce qui est légitime puisque $-\frac{b}{a}$ est positif,

$$\frac{b^2}{a^2} \geqslant 4\frac{c}{a},$$

ou enfin

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

Cette condition étant supposée vérifiée, la première équation donne :

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{b}{a} - 2\sqrt{\frac{c}{a}}}}{2},$$

et la seconde :

$$x = \frac{-\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{c}{a}}}}{2},$$

ou, en une seule formule :

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{c}{a}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{c}{a}}}.$$

On vérifie aisément l'identité de cette formule avec celle que nous avons trouvée précédemment.

Si l'on suppose $\frac{b}{a}$ positif, l'équation n'a pas de racines, car les trois termes x^4, $\frac{b}{a}x^2$, $\frac{c}{a}$ étant positifs quelle que soit la valeur de x, leur somme n'est jamais nulle.

Exemple. — Résoudre l'équation

$$3x^4 - 15x + 12 = 0.$$

On a :

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{4}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{4}}$$

$$= \pm\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

d'où les quatre racines

$$x = 2, \quad x = 1, \quad x = -1, \quad x = -2.$$

142. — Pour résoudre l'inégalité bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c > 0,$$

on considérera d'abord l'inégalité

$$ay^2 + by + c > 0,$$

et l'on cherchera les valeurs positives de y qui la vérifient; les solutions de l'équation donnée seront les racines carrées positives et négatives de ces valeurs.

On comparera de même un nombre m aux racines de l'équation bicarrée

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

en comparant son carré m^2 aux racines positives de l'équation

$$ay^2+by+c=0,$$

et tenant compte du signe de m, et de celui des racines de l'équation donnée.

Exemple. — Résoudre l'inégalité

$$x^4-16x^2+63>0.$$

L'équation

$$y^2-16y+63=0$$

a pour racines 7 et 9; donc les valeurs positives de y qui vérifient l'inégalité

$$y^2-16y+63>0$$

sont

$$0<y<7, \quad 9<y;$$

par suite les valeurs de x qui vérifient l'inégalité proposée sont

$$x<-3, \quad -\sqrt{7}<x<\sqrt{7}, \quad x>3.$$

Remarque. — La méthode qui nous a servi pour résoudre l'équation bicarrée s'appliquerait de même à la résolution d'équations de la forme

$$ax^{2n}+bx^n+c=0.$$

On résoudrait d'abord l'équation

$$ay^2+by+c=0,$$

et l'on serait ramené ensuite à l'extraction de racines n^{mes}.

De même on peut généraliser ce que nous avons dit sur la résolution de l'inégalité bicarrée.

§ 5. — Systèmes du second degré.

143. — Les systèmes d'équations du second degré sont ceux dont la résolution se ramène à celle d'équations du second degré soit directement, soit indirectement.

Les systèmes d'équations qui se résolvent directement à l'aide d'équations du second degré sont les systèmes de n équations à n inconnues dans lesquels toutes les équations sont du premier degré par rapport à toutes les inconnues, sauf une qui est du second degré.

En effet, si l'on résout toutes les équations du premier degré du système par rapport à $n - 1$ des inconnues, en regardant la n^{me}, x par exemple, comme un paramètre, on s'assure aisément que les solutions trouvées sont toutes des polynômes du premier degré en x. En portant ces valeurs dans l'équation du second degré, on obtient donc une équation du second degré en x; si cette équation n'a pas de racines, le système proposé est impossible; si cette équation a deux racines, le système a en général deux systèmes de solutions que l'on obtient tout de suite.

Exemple. — Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{r} 2x^2 - y^2 + 2xz + 3xy - 5x + 4y - 7z + 2 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0, \\ 5x - 4y + 6z - 7 = 0. \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent :

$$\left\{\begin{array}{l} y = 17 - 16x, \\ z = \dfrac{25 - 23x}{2}; \end{array}\right.$$

portant ces valeurs dans la première, il vient après réduction :

$$-325x^2 + \frac{1263}{2}x - \frac{613}{2} = 0,$$

équation qui admet les deux racines

$$x' = 1, \quad x'' = \frac{613}{650}.$$

Le système a donc deux solutions

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 1, \\ z' = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{613}{650}, \\ y'' = \dfrac{621}{325}, \\ z'' = \dfrac{2151}{1300}. \end{cases}$$

144. — Dans d'autres cas, on ne ramène le système à des équations du second degré que par des artifices de calcul ou l'emploi d'inconnues auxiliaires; ou bien on arrive à une équation bicarrée; ou encore certains systèmes qui paraissent de degré plus élevé que le second se ramènent d'eux-mêmes au second degré.

Exemples. — 1° Résoudre le système

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

La seconde équation donne:

$$y = 5 - x,$$

et portant dans la première, il vient :

$$15x^2 - 75x + 125 = 35,$$

ou

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

d'où

$$x' = 2, \qquad x'' = 3.$$

Le système a deux solutions

$$\begin{cases} x' = 2, \\ y' = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 3, \\ y'' = 2. \end{cases}$$

2° Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 5x^2y^2, \\ 2x - y = xy. \end{cases}$$

En faisant

$$x=\frac{1}{x'},\quad y=\frac{1}{y'},$$

on est ramené au système du second degré

$$\begin{cases} 3y'^2+2x'^2=5, \\ 2y'-x'=1. \end{cases}$$

La seconde équation donne :

$$x'=2y'-1,$$

et la première devient :

$$11y'^2-8y'-3=0,$$

d'où les deux solutions

$$\begin{cases} y'_1=1, \\ x'_1=1, \end{cases}\quad \begin{cases} y'_2=-\frac{3}{11}, \\ x'_2=-\frac{17}{11}, \end{cases}$$

et par suite pour le système proposé

$$\begin{cases} y_1=1, \\ x_1=1, \end{cases}\quad \begin{cases} y_2=-\frac{11}{3}, \\ x_2=-\frac{11}{17}. \end{cases}$$

3° Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x^2-4y^2=8, \\ xy=-2. \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$y=-\frac{2}{x};$$

portant dans la première, il vient :

$$3x^2-\frac{16}{x^2}=8,$$

ou $$3x^4-8x^2-16=0,$$

d'où les deux solutions

$$\begin{cases} x'=2, \\ y'=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x''=-2, \\ y''=1. \end{cases}$$

Nous rencontrerons plus loin d'autres exemples de tels systèmes.

Exercices

I. — Résoudre les équations suivantes :

1. — $$x^2-7x=9.$$

2. — $$3x^2-36x-107=0.$$

3. — $$x^2+8x+3=0.$$

4. — $$(x-3)(x+4)=(2x-5)(3x+7).$$

5. — $$x^2-\frac{1}{7}(x-4)=\frac{1}{3}(x^2-5)+9.$$

6. — $$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}=1.$$

7. — $$7+8x+\frac{9}{x+2}=5.$$

8. — $$\frac{35x^3-9x}{5x^2+4}+7x-3=12.$$

9. — $$2+\sqrt{x+1}=13-\frac{x}{8}.$$

10. — $$\frac{x^2+1}{x-3}+3=5x-7.$$

11. — $$(3m-1)x^2-(7+m)x+\frac{1}{12}(m+4)=0.$$

12. — $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$

13. — $$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=b.$$

14. — $$\sqrt{3+\sqrt{12-x}}=\sqrt{9-x}.$$

15. — $$\sqrt{5+x}+\sqrt{20-x}=\sqrt{45+x}.$$

II. — Déterminer, sans les résoudre, les signes des racines des équations suivantes, quand ces racines existent :

16. — $$3x^2-47x-9=0.$$

17. — $5x^2 - 18x + 3 = 0.$

18. — $(3m + 1)x^2 - (7 - m)x + \frac{1}{12}(m - 4) = 0.$

19. — $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0.$

20. — $(m - 5)x^2 - 2(m - 4)x + (m - 3) = 0.$

III. 21. — Quelle est l'équation du second degré qui admet comme racines — 69 et 17?

22. — Quelle est l'équation du second degré qui admet comme racines $3 - \frac{2}{\sqrt{7}}$ et $3 + \frac{2}{\sqrt{7}}$?

23. — Quelle est l'équation du second degré qui admet comme racines $\frac{a + b}{a - b}$ et $\frac{a - b}{a + b}$?

24. — x' et x'' étant les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, calculer $x'^5 + x''^5$ en fonction des coefficients a, b, c.

25. — Calculer $\frac{x'^3 + x''^3}{x' + x''}$.

26. — Calculer $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}$.

27. — Former l'équation du second degré ayant pour racines $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$. Expliquer le résultat obtenu.

28. — Former l'équation du second degré ayant pour racines $\frac{x'}{x''}$ et $\frac{x''}{x'}$.

29. — Former l'équation du second degré ayant pour racines x'^3 et x''^3.

30. — Former l'équation du second degré ayant pour racines $\frac{x'^2}{x''}$ et $\frac{x''^2}{x'}$.

31. — Résoudre les équations

$$\begin{cases} a^2 + ax + y = 0, \\ b^2 + bx + y = 0. \end{cases}$$

Expliquer le résultat obtenu.

32. — Quelle relation existe entre a, b, c si l'on a $x' = kx''$?

33. — Quelle relation existe entre a, b, c si $x' = x''^2$?

34. — Former l'équation du second degré ayant pour racines $x' + h$ et $x'' + h$.

35. — Former l'équation du second degré ayant pour racines kx' et kx''.

IV. — Résoudre les inégalités suivantes :

36. — $$x^2 - 7x + 9 < 0.$$

37. — $$-3x^2 + 4x + 7 > 0.$$

38. — $$\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 1} > 3.$$

39 — $$\frac{x^2 + 7x - 3}{x^2 - 4x + 4} > -4$$

40. — $$\frac{x-5}{x+3} > \frac{3x-2}{x-4} + 7.$$

V. — Résoudre les inégalités simultanées :

41. — $$\begin{cases} -x^2 + 7x + 3 < 0, \\ x^2 - 3x + 5 > 0. \end{cases}$$

42. — $$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-4} - \dfrac{3x}{x+5} < 1, \\ \dfrac{2x-4}{3x} - 7 < 5x. \end{cases}$$

VI. — Résoudre les inégalités à deux inconnues :

43. — $$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x - 2y + 7 > 0.$$

44. — $$x^2 + 2xy + 5y^2 - 2x - 5y - 7 < 0.$$

45. — $$x^2 + 7xy - y^2 + 8x - 3y - 1 > 0.$$

46. — $$3x^2 + 42xy + 147y^2 - 5x - 3y + 9 > 0.$$

VII. 47. — Démontrer que l'on a toujours :

$$2x^2 - 3xy + 5y^2 + 4x - 14y + 20 > 0,$$

quelles que soient les valeurs attribuées à x et y.

48. — Faire voir que l'équation

$$(a + b + c)\,x^2 - 2\,(bc + ca + ab)\,x + 3abc = 0$$

a toujours deux racines distinctes quand a, b, c sont des nombres différents non nuls.

49. — Faire voir que l'équation

$$(a-x)(a'-x)-(b+b'x)^2=0$$

a toujours deux racines, si l'on a $b'^2<1$.

50. — Faire voir que l'équation

$$\frac{m^2}{a+x}+\frac{n^2}{b+x}-1=0$$

a toujours deux racines distinctes.

VIII. 51. — Comparer -3 aux racines de l'équation

$$2x^2-17x-29=0.$$

52. — Comparer $-\frac{1}{5}$ aux racines de l'équation

$$3x^2+7x-1=0.$$

53. — Choisir m de façon que l'équation

$$-x^2+x+m=0$$

ait deux racines comprenant entre elles le nombre 3.

54. — Choisir m de façon que la même équation ait deux racines inférieures à 3.

55. — Discuter les signes des racines de l'équation

$$(m-1)x^2-4mx-2(m+2)=0$$

quand m prend toutes les valeurs possibles.

56. — Même question pour l'équation

$$(2m+5)x^2-3(m+2)x+(4-3m)=0.$$

57. — Comparer à 5 les racines de l'équation

$$(2m-7)x^2+(3m-4)x-7=0.$$

58. — Combien de racines comprises entre -5 et $+5$ admet l'équation

$$(2m-1)x^2+3mx-7m+4=0\,?$$

59. — Combien de racines inférieures à -3 admet l'équation

$$mx^2+2x-4m-1=0\,?$$

60. — Pour quelles valeurs de m l'équation

$$(3m^2-4m-1)x^2+5(m-3)x-1=0$$

admet-elle deux racines supérieures à 10?

IX. — Résoudre les équations :

61. — $$4x^4 - 15x^2 - 9 = 0.$$

62. — $$\frac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = x^2.$$

63. — $$-5x^4 + 19x^2 - 4 = 0.$$

64. — $$13 - \sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 - 4.$$

65. — $$a + \sqrt{x^4 + 2x^2 + 9} = 5x^2 + a^2.$$

66. — $$x^6 - 28x^3 + 27 = 0.$$

67. — $$x^8 - 5x^4 - 96 = 0.$$

X. — Discuter la nature des racines des équations.

68. — $$(m - 1)x^4 - 4mx^2 - 2(m + 2) = 0.$$

69. — $$(m^2 - 1)x^4 - 4mx^2 + 3(m^2 - 4) = 0.$$

XI. — Résoudre les inégalités

70. — $$4x^4 - 15x^2 - 9 < 0.$$

71. — $$\frac{x^4 - 1}{x^2 - 9} > 3 - 7x^2.$$

72. — $$\frac{3x^2 - 7}{x^2 + 4} < \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}.$$

XII. — Résoudre les systèmes d'équations simultanées :

73. — $$\begin{cases} 3x^2 - 5xy + 7x - 9 = 0, \\ 2x + 7y - 15 = 0. \end{cases}$$

74. — $$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 - 6y^2 - 3xy = 15. \end{cases}$$

75. — $$\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 + 8xz = 0, \\ 2x - 8y + 3z = 4. \end{cases}$$

76. — $$\begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

77. — $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 7y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 9y - 7 = 0. \end{cases}$$

(On commence par retrancher les deux équations membre à membre.)

78. — $$\begin{cases} 3xy - 5x - 2y + 3 = 0, \\ y^2 + 3x^2 + 4x + 3y - \frac{71}{12} = 0. \end{cases}$$

(L'élimination de y conduit à une équation bicarrée.)

79. — $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ mx + ny + p = 0. \end{cases}$

Discuter.

80. — $\begin{cases} \dfrac{y^2}{p} - \dfrac{z^2}{q} - 2x = 0, \\ y = az + h \\ z = bx + k. \end{cases}$

Discuter.

CHAPITRE II

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

145. — Ce chapitre montrera suffisamment par les exemples auxquels il est consacré comment l'on résout et l'on discute, en appliquant toujours les principes indiqués au n° **120**, les problèmes du second degré, c'est-à-dire ceux qui se résolvent à l'aide d'équations du second degré.

Problème I

Après avoir acheté un objet, on le revend a francs et l'on se trouve avoir gagné sur le prix d'achat autant pour cent que l'objet a coûté. Combien a-t-on payé cet objet ?

Soit x le prix d'achat ; on a l'équation

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{100},$$

ou

$$x^2 + 100x - 100a = 0.$$

Cette équation a une racine positive qui, seule, convient au problème :

$$x = -50 + \sqrt{2500 + 100a}$$
$$= -50 + 10\sqrt{25 + a}.$$

Application : Pour $a = 24$, on a $x = 20$.

PROBLÈME II

Un certain nombre de personnes doivent se partager également une somme A; mais *p* de ces personnes meurent avant le partage, et par suite chacune des personnes restantes reçoit *a* francs de plus qu'elle n'aurait eu sans cette circonstance. On demande le nombre primitif de personnes.

Soit x le nombre cherché; on a l'équation

$$\frac{A}{x-p}=\frac{A}{x}+a,$$

ou

$$ax^2-apx-Ap=0.$$

Cette équation a une racine positive qui, seule, peut convenir au problème:

$$x=\frac{ap+\sqrt{a^2p^2+4Aap}}{2a}=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+p\frac{A}{a}}.$$

D'après l'équation même, cette racine est supérieure à p, puisqu'elle donne à $\frac{A}{x-p}$ une valeur positive.

Pour que cette racine convienne, il faut encore, d'après les conditions du problème, qu'elle soit entière.

Application :

$$p=5,\ A=720,\ a=100.$$

Alors :

$$x=9.$$

Remarque. — Pour que x soit un nombre entier, il faut que $p^2+4p\frac{A}{a}$ soit le carré d'un nombre de même parité que p, tel que $p+2h$, h étant un entier quelconque positif. Donc

$$p^2+4p\frac{A}{a}=p^2+4ph+4h^2,$$

d'où

$$\frac{A}{a} = h + \frac{h^2}{p}, \quad \text{et alors } x = p + h.$$

Dans l'exemple précédent, on a $h = 4$.

Problème III

Deux courriers partent en même temps d'un même point pour parcourir une même distance *d*; la vitesse du premier surpasse celle du second de *a*, et le premier arrive un temps *t* avant le second. Quelles sont les vitesses des deux courriers?

Soient x et y ces deux vitesses, on a les deux équations

$$\begin{cases} x = y + a, \\ \dfrac{d}{y} - \dfrac{d}{x} = t, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = x - a, \\ \dfrac{d}{x-a} - \dfrac{d}{x} = t. \end{cases}$$

La seconde devient

$$tx^2 - atx - ad = 0,$$

et a une racine positive qui, seule, peut convenir au problème, si elle est supérieure à a, ce qui a lieu en effet ; on le voit comme plus haut.

Le problème a donc toujours une solution et une seule :

$$x = \frac{at + \sqrt{at(at + 4d)}}{2t},$$

$$y = x - a = \frac{-at + \sqrt{at(at + 4d)}}{2t}.$$

Problème IV

On a acheté un certain nombre d'objets semblables pour A francs ; si chacun d'eux coûtait *a* francs de

moins, on aurait pu en acheter p de plus pour le même prix. Combien a-t-on acheté d'objets, et quel est le prix de chacun?

En appelant x le nombre des objets, chacun d'eux coûte $\frac{A}{x}$.

On a donc l'équation

$$\left(\frac{A}{x}-a\right)(x+p)=A,$$

ou

$$ax^2+apx-Ap=0.$$

Cette équation a une racine positive qui, seule, convient au problème :

$$x=\frac{-ap+\sqrt{ap(ap+4A)}}{2a}.$$

Cette solution est acceptable dans tous les cas si elle est entière; sinon, elle n'est acceptable que si les objets considérés sont divisibles, tels que des mètres d'étoffe, etc.

Problème V

Dans un tube cylindrique recourbé et fermé à l'une de ses extrémités (*fig.* 30), on a versé du mercure, de façon à emprisonner l'air dans la branche fermée, le niveau du mercure étant le même dans les deux branches. On verse de nouveau une quantité connue de mercure dans le tube, et l'on demande à quelle hauteur s'élèvera le mercure dans la branche fermée au-dessus du niveau primitif.

Soit h la longueur de tube occupée d'abord par l'air et P la pression atmosphérique, exprimée comme d'habitude par la hauteur de la colonne de mercure qui lui fait équilibre.

Soit l la longueur qu'occuperait dans le tube la quantité de mercure que l'on verse la seconde fois dans le tube, et appelons x et y les hauteurs dont s'élève le mer-

cure dans la branche fermée et dans la branche ouverte au-dessus du niveau primitif après cette opération. On a d'abord :

$$x + y = l.$$

La masse d'air enfermée dans le tube occupait primitivement une longueur h sous la pression P ; elle occupe ensuite une longueur $h - x$ sous la pression $P + y - x$; donc, d'après la loi de Mariotte, on a :

$$hP = (h - x)(P + y - x),$$

ou, à cause de la première équation,

$$hP = (h - x)(P + l - 2x).$$

Telle est l'équation du problème. Une racine de cette équation conviendra au problème si elle est inférieure à h.

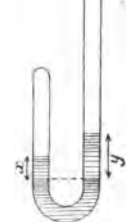


Fig. 30.

Cette équation s'écrit :

$$2x^2 - x(2h + P + l) + hl = 0.$$

Sans nous occuper d'abord de la condition d'existence des racines, substituons h à la place de x dans le premier membre, on trouve le résultat $-hP$: donc, le coefficient de x^2 étant positif, l'équation a deux racines, et la plus petite de ces racines seule est inférieure à h. Le problème a par suite une solution et une seule :

$$x = \frac{2h + P + l - \sqrt{(2h + P + l)^2 - 8hl}}{4}.$$

Cette racine est d'ailleurs positive, comme cela devait être.

On peut vérifier directement que la quantité sous le radical est toujours positive ; en effet, on a :

$$\begin{aligned}(2h + P + l)^2 - 8hl &\equiv (2h + l)^2 - 8hl + 2P(2h + l) + P^2 \\ &\equiv (2h - l)^2 + 2P(2h + l) + P^2,\end{aligned}$$

et sous cette forme on voit qu'elle est toujours positive.

Problème VI

On laisse tomber une pierre dans un puits; on entend le bruit de la pierre rencontrant l'eau au bout d'un temps t. Quelle est la profondeur du puits?

Si x est la profondeur du puits, le temps t_1 mis par la pierre pour rencontrer l'eau est défini, comme on sait, par la relation

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2,$$

g étant l'accélération de la pesanteur.

Donc

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

D'autre part, si v est la vitesse du son (qui se propage d'un mouvement uniforme), le temps t_2 mis par le son pour remonter du fond du puits à l'ouverture est défini par

$$x = v t_2,$$

d'où

$$t_2 = \frac{x}{v}.$$

L'équation du problème est donc :

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t,$$

ou

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v};$$

d'où, en élevant les deux membres au carré :

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2},$$

ou

$$x^2 - 2vx\left(t + \frac{v}{g}\right) + v^2 t^2 = 0.$$

Une solution de cette équation convient au problème si elle est positive, et si en outre elle rend positive la quantité $t-\frac{x}{v}$, puisque cette quantité est égale à $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, et que l'équation finale ci-dessus n'est pas équivalente à l'équation du problème, mais renferme aussi les solutions de l'équation

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v}.$$

Il faut donc :

$$t-\frac{x}{v}>0 \quad \text{ou} \quad x<vt.$$

En substituant vt à la place de x dans le premier membre de l'équation, on trouve le résultat $-2\frac{v^2t}{g}$; donc l'équation a deux racines, et la plus petite seule, qui est inférieure à vt, convient au problème qui admet l'unique solution :

$$x=v\left(t+\frac{v}{g}\right)-\sqrt{v^2\left(t+\frac{v}{g}\right)^2-v^2t^2}$$
$$=v\left[t+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}\right].$$

Problème VII

146. — Trouver deux nombres x et y, connaissant leur produit p et leur somme s.

Remarquons d'abord que si l'équation du second degré

$$t^2-st+p=0$$

a deux racines t' et t'', on pourra prendre :

$$\begin{cases} x=t', \\ y=t'', \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=t'', \\ y=t', \end{cases}$$

d'après les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré.

Mais nous ne sommes pas certains d'avoir ainsi toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x+y=s, \\ xy=p. \end{cases}$$

Pour montrer qu'il en est bien ainsi, éliminons y; il vient :

$$\begin{cases} y=s-x, \\ x^2-sx+p=0. \end{cases}$$

Donc, si l'équation $x^2-sx+p=0$ n'a pas de racines, le problème est impossible; si elle a deux racines x' et x'', le problème a deux solutions :

$$\begin{cases} x=x', \\ y=s-x', \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=x'', \\ y=s-x'', \end{cases}$$

ou, puisque l'on a $x'+x''=s$,

$$\begin{cases} x=x', \\ y=x'', \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=x'', \\ y=x'. \end{cases}$$

Donc il suffit bien de résoudre l'équation

$$t^2-st+p=0$$

pour résoudre le problème.

Le problème n'est possible que si l'on a :

$$s^2-4p \geqslant 0,$$

ou

$$p < \frac{s^2}{4}.$$

Donc *le maximum du produit de deux facteurs dont la somme est donnée est égal au carré de leur demi-somme, et a lieu quand ces deux facteurs sont égaux :* car pour $s^2-4p=0$, on a $t'=t''$, et par suite $x=y$.

Quand on a :

$$s^2 > 4p,$$

les solutions du problème sont :

$$\begin{cases} x=\dfrac{s \pm \sqrt{s^2-4p}}{2}, \\ y=\dfrac{s \mp \sqrt{s^2-4p}}{2}. \end{cases}$$

Remarque. — Rien ne distingue l'un de l'autre les nombres x et y, car en changeant x en y et y en x, les équations ne changent pas. Aussi dit-on d'habitude que le problème a une seule solution, parce qu'il y a un seul système de deux nombres vérifiant les conditions données; on écrit alors :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Toutes les fois que, dans une question, il faudra déterminer deux nombres x et y que rien ne distingue l'un de l'autre, c'est-à-dire qui figurent *symétriquement* dans les équations du problème, il sera convenable de prendre pour inconnues auxiliaires la somme et le produit de ces deux nombres; une fois ces inconnues auxiliaires déterminées, on sera ramené à la résolution d'une équation du second degré.

Application. — *Construire un rectangle, connaissant sa surface* S *et son périmètre* 2p.

En appelant x et y les dimensions du rectangle, on a :

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = S, \end{cases}$$

et par suite on est ramené à l'équation

$$t^2 - pt + S = 0.$$

Le problème a une solution si l'on a :

$$p^2 - 4S \geqslant 0,$$

p et S étant des nombres positifs; sinon il n'en a pas.

Si le périmètre est donné, le maximum de la surface est $\frac{p^2}{4}$; il a lieu quand le rectangle est un carré.

La condition de possibilité du problème peut encore s'écrire :

$$p^2 \geqslant 4S,$$

ou

$$p \geqslant 2\sqrt{S},$$

puisque p et S sont des nombres positifs; si donc la surface est donnée, le minimum du périmètre est $2\sqrt{S}$: il a lieu quand le rectangle est un carré.

Problème VIII

Trouver deux nombres x et y, connaissant leur différence d et leur produit p.

On a les deux équations

$$\begin{cases} x-y=d, \\ xy=p. \end{cases}$$

On peut les résoudre directement en éliminant y; il vient alors :

$$\begin{cases} y=x-d, \\ x^2-dx-p=0. \end{cases}$$

Le problème est toujours possible et a deux solutions :

$$\begin{cases} x=\dfrac{d\pm\sqrt{d^2+4p}}{2}, \\ y=x-d=\dfrac{-d\pm\sqrt{d^2+4p}}{2}, \end{cases}$$

les signes supérieurs et inférieurs étant pris en même temps.

On peut encore ramener ce problème au précédent, en prenant pour inconnue auxiliaire $y'=-y$; on a alors

$$\begin{cases} x+y'=d, \\ xy'=-p. \end{cases}$$

On trouve les mêmes solutions.

Enfin, remarquons qu'il est souvent commode, quand on connaît la différence d de deux inconnues x et y, de chercher leur somme s; en effet, des équations

$$\begin{cases} x+y=s, \\ x-y=d, \end{cases}$$

on tire :

$$x = \frac{s+d}{2}, \; y = \frac{s-d}{2}.$$

Ici, pour chercher $x+y$, élevons les deux membres de la première équation au carré, ce qui donne :

$$x^2 - 2xy + y^2 = d^2,$$

puis ajoutons membre à membre cette équation et celle-ci :

$$4xy = 4p,$$

qui se déduit immédiatement de la seconde ; il vient :

$$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 4p,$$

ou

$$(x+y)^2 = d^2 + 4p,$$

et le système

$$\begin{cases} x - y = d, \\ (x+y)^2 = d^2 + 4p, \end{cases}$$

est équivalent au système proposé.

On en déduit :

$$x + y = \pm\sqrt{d^2 + 4p},$$

et par suite

$$\begin{cases} x = \dfrac{d \pm \sqrt{d^2+4p}}{2}, \\ y = \dfrac{-d \pm \sqrt{d^2+4p}}{2}, \end{cases}$$

comme précédemment.

La même méthode aurait pu être employée pour résoudre le problème précédent.

Application. — *Construire un rectangle, connaissant sa surface* S, *et la différence* d *de ses deux dimensions.*

Si x et y sont la plus grande et la plus petite dimension du rectangle, on a :

$$\begin{cases} x - y = d, \\ xy = S, \end{cases}$$

d et S étant des nombres positifs.

x et y devant être positifs, le problème a une solution et une seule :

$$x = \frac{d + \sqrt{d^2 + 4S}}{2},$$

$$y = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4S}}{2}.$$

Problème IX

Trouver deux nombres x et y, connaissant leur somme s et la somme q de leurs carrés.

On a les deux équations

$$\begin{cases} x + y = s, \\ x^2 + y^2 = q. \end{cases}$$

Au lieu de les résoudre directement par élimination de y, formons la combinaison

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = s^2 - q,$$

ou

$$2xy = s^2 - q;$$

le système

$$\begin{cases} x + y = s, \\ xy = \dfrac{s^2 - q}{2}, \end{cases}$$

est équivalent au système proposé.

On est donc ramené à résoudre l'équation du second degré

$$t^2 - st + \frac{s^2 - q}{2} = 0.$$

Cette équation n'a de racines que si l'on a :

$$s^2 - 2(s^2 - q) \geqslant 0,$$

ou

$$2q - s^2 \geqslant 0.$$

Cette condition étant supposée vérifiée, on a :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s \pm \sqrt{2q - s^2}}{2}.$$

Si s est donné, le minimum de q est $\frac{s^2}{2}$; il a lieu pour $x=y$.

Application. — *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et la somme* s *des deux autres côtés.*

Si x et y sont les côtés de l'angle droit, on a :

$$\begin{cases} x+y=s, \\ x^2+y^2=a^2; \end{cases}$$

le problème ne peut avoir de solution que si l'on a :

$$2a^2-s^2 \geqslant 0,$$

ou, puisque a et s sont des nombres positifs,

$$a\sqrt{2}-s \geqslant 0.$$

Mais il faut en outre que les valeurs de x et y soient positives, ce qui exige :

$$s^2 > a^2,$$

ou

$$s > a,$$

ce qui était évident géométriquement.

Le problème n'est donc possible que si l'on a :

$$a < s \leqslant a\sqrt{2}.$$

On voit que : a étant donné, le maximum de s est $a\sqrt{2}$; il a lieu pour $x=y$, c'est-à-dire pour le triangle rectangle isocèle ; de même, s étant donné, le minimum de a est $\frac{s}{\sqrt{2}}$; il a lieu aussi pour le triangle rectangle isocèle. D'ailleurs on a toujours $a < s$.

PROBLÈME X

Trouver deux nombres x et y, connaissant leur différence d et la somme q de leurs carrés.

On a les deux équations

$$\begin{cases} x-y=d, \\ x^2+y^2=q. \end{cases}$$

Formons la combinaison

$$2(x^2+y^2)-(x-y)^2=2q-d^2,$$

ou

$$(x+y)^2=2q-d^2;$$

le système

$$\begin{cases} x-y=d, \\ (x+y)^2=2q-d^2, \end{cases}$$

est équivalent au proposé.

Il donne si l'on a $2q-d^2 \geqslant 0$,

$$x+y=\pm\sqrt{2q-d^2},$$

et par suite

$$\begin{cases} x=\dfrac{d\pm\sqrt{2q-d^2}}{2}, \\ y=\dfrac{-d\pm\sqrt{2q-d^2}}{2}, \end{cases}$$

les signes supérieurs et inférieurs étant pris en même temps.

Si d est donné, le minimum de q est $\dfrac{d^2}{2}$; il a lieu pour $x=-y$.

Application. — *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et la différence* d *des deux côtés de l'angle droit.*

Si x et y sont le plus grand et le plus petit côté de l'angle droit, on a :

$$\begin{cases} x-y=d, \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Le problème n'est possible que si l'on a :

$$2a^2-d^2 \geqslant 0,$$

ou, puisque a et d sont positifs,

$$a\sqrt{2}-d \geqslant 0.$$

En outre, il faut que x et y soient positifs ; on prendra donc seulement :

$$x+y=\sqrt{2a^2-d^2},$$

et le problème aura au plus une solution

$$\begin{cases} x=\dfrac{d+\sqrt{2a^2-d^2}}{2}, \\ y=\dfrac{-d+\sqrt{2a^2-d^2}}{2}. \end{cases}$$

Cette solution ne convient que si l'on a $y > 0$, ou

$$d < \sqrt{2a^2-d^2},$$

ou encore

$$d^2 < 2a^2-d^2,$$

c'est-à-dire

$$d < a,$$

ce qui était évident géométriquement.

Cette condition entraînant celle que l'on a trouvée plus haut, il en résulte que le problème est possible et admet une seule solution, sous la condition $d < a$.

Problème XI

Trouver deux nombres, connaissant leur produit p et la somme q de leurs carrés.

On a les équations :

$$\begin{cases} xy=p, \\ x^2+y^2=q, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$x^2+y^2+2xy=q+2p,$$

ou

$$(x+y)^2=q+2p.$$

Le système

$$\begin{cases} xy=p, \\ (x+y)^2=q+2p, \end{cases}$$

est équivalent au système proposé.

Il donne si l'on a $q + 2p > 0$,

$$x + y = \pm\sqrt{q + 2p},$$

et par suite on est ramené à l'équation du second degré

$$t^2 \mp \sqrt{q + 2p}\, t + p = 0.$$

Cette équation a des racines si l'on a :

$$q + 2p - 4p \geqslant 0,$$

ou

$$q - 2p \geqslant 0.$$

Alors on a deux systèmes de solutions, suivant que le radical $\sqrt{q + 2p}$ est affecté d'un signe ou de l'autre,

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{q + 2p} \pm \sqrt{q - 2p}}{2}, \quad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{-\sqrt{q + 2p} \pm \sqrt{q - 2p}}{2}.$$

Le problème n'est possible que si q est égal ou supérieur à la valeur absolue de $2p$.

Application. — *Construire un triangle rectangle, connaissant son hypoténuse* a *et sa surface* S.

Si x et y sont les côtés de l'angle droit, on a :

$$\left\{\begin{matrix} xy = 2S, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{matrix}\right.$$

Le problème n'est possible que si l'on a, puisque a et S sont des nombres positifs,

$$a^2 - 4S \geqslant 0,$$

ou

$$a - 2\sqrt{S} \geqslant 0.$$

Comme x et y doivent être positifs, il faut prendre seulement :

$$x + y = \sqrt{a^2 + 4S},$$

et l'on a l'unique solution

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{a^2+4S} \pm \sqrt{a^2-4S}}{2}.$$

Si a est donné, le maximum de S est $\frac{a^2}{4}$; on a alors $x=y$, et le triangle est isocèle. De même, si S est donné, le minimum de a est $2\sqrt{S}$, et le triangle est encore isocèle.

Problème XII

147. — Sur une droite X'X, on donne deux points A et B; trouver un point M tel que l'on ait :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \times \overline{MB} \ (\textit{fig. } 31).$$

C'est ce qu'on appelle partager AB en *moyenne et extrême raison.*

X' A M B X

Fig. 31.

Soit a le segment $\overline{AB}$ compté positivement dans le sens AB, et x le segment $\overline{AM}$; l'équation du problème est

$$x^2 = a(a-x),$$

ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Le problème a deux solutions : l'une des valeurs de x, x'', est positive, l'autre x' est négative. Le point M qui correspond à la valeur positive x'' est entre A et B, car, si nous substituons a à la place de x dans le premier membre de l'équation, on trouve comme résultat a^2; donc a est supérieur à x'' ou inférieur à x'; cette dernière hypothèse est absurde, puisque x' est négatif; donc on a bien $x'' < a$.

On trouve aisément :

$$x'' = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x' = a\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Problème XIII

Dans un demi-cercle O de diamètre AB, inscrire un trapèze ABCD de périmètre donné (*fig.* 32).

Soit $2p$ le périmètre donné, R le rayon du demi-cercle, x la demi-base CD, égale à OH, H étant la projection de C sur AB.

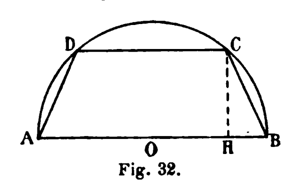


Fig. 32.

D'après un théorème connu, on a :

$$BC = \sqrt{2R(R-x)},$$

et par suite l'équation du problème est :

$$R + x + \sqrt{2R(R-x)} = p.$$

Une solution de cette équation conviendra au problème si elle est positive et inférieure à R.

En chassant le radical, on obtient la nouvelle équation

$$2R(R-x) = (p - R - x)^2,$$

ou

$$(1)\ x^2 - 2x(p-2R) + (p-R)^2 - 2R^2 = 0.$$

Une solution de cette équation conviendra au problème si elle est positive et inférieure à R, et si de plus elle rend la quantité $p - R - x$ positive, puisque cette quantité est égale au radical $\sqrt{2R(R-x)}$, et qu'en chassant le radical, on a introduit les solutions qui rendraient $p - R - x$ égale à $-\sqrt{2R(R-x)}$. En particulier, puisque l'on a $x > 0$, il faut que l'on ait $p > R$.

L'équation (1) n'a de racines que si l'on a :

$$(p-2R)^2 - (p-R)^2 + 2R^2 \geqslant 0,$$

ou

$$-2pR + 5R^2 \geqslant 0,$$

ou, puisque R est une quantité positive,

$$p \leqslant \frac{5}{2}R.$$

Cette condition étant supposée vérifiée, examinons le produit des racines, $(p-R)^2 - 2R^2$, ou

$$\left(p - R(1+\sqrt{2})\right)\left(p + R(\sqrt{2}-1)\right);$$

puisque p et R sont positifs, ce produit a le signe de

$$p - R(1+\sqrt{2});$$

d'ailleurs on a :

$$2R < R(1+\sqrt{2}) < \frac{5}{2}R.$$

Donc, la somme des racines étant $2(p-2R)$, on voit que, si l'on a $p < R(1+\sqrt{2})$, l'équation a deux racines de signes contraires; si l'on a $R(1+\sqrt{2}) < p < \frac{5}{2}R$, l'équation a deux racines positives.

Toute racine de l'équation (1) est plus petite que R, puisqu'elle donne au radical $\sqrt{2R(R-x)}$ une valeur, savoir

$$\pm(p-R-x).$$

Ce fait serait d'ailleurs facile à vérifier directement.

Substituons maintenant $p-R$ à la place de x dans le premier membre de l'équation (1); le résultat est :

$$2R(p-2R);$$

donc, si l'on a $p < 2R$, une seule des racines est inférieure à $p-R$; si l'on a $p > 2R$, les deux racines sont en même temps inférieures ou supérieures à $p-R$; elles seront inférieures à $p-R$, si leur demi-somme $p-2R$ est elle-même inférieure à $p-R$, ce qui a lieu évidemment.

Résumons maintenant :

1° on a $p < 2R$; la plus grande racine seule est positive;

mais la plus petite seule est inférieure à $p - R$: donc on n'a pas de solutions ;

2° on a $2R < p < R(1+\sqrt{2})$; la plus grande racine seule est positive; elle est inférieure à $p - R$: on a une solution ;

3° on a $R(1+\sqrt{2}) < p < \frac{5}{2}R$; les deux racines vérifient toutes les conditions imposées : on a deux solutions ;

4° on a $\frac{5}{2}R < p$; l'équation (1) n'a pas de racines : il n'y a pas de solutions.

R étant donné, $\frac{5}{2}R$ est le maximum de p; dans ce cas on a une solution double, $x = \frac{R}{2}$; le trapèze est un demi-hexagone régulier.

Pour $p = R(1+\sqrt{2})$, on a une solution ordinaire, et en plus $x = 0$; pour cette valeur de x, le trapèze se réduit à un demi-carré.

Pour $p = 2R$, on a $x = R$; le trapèze se réduit à AB compté deux fois.

Problème XIV

Inscrire dans une sphère de rayon R un cylindre de surface totale donnée (*fig.* 33).

Si x est le rayon du cylindre, y sa demi-hauteur, $2\pi m^2$ la surface donnée, on a les équations évidentes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ 2\pi x^2 + 4\pi xy = 2\pi m^2, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + 2xy = m^2, \end{cases}$$

ou, en éliminant y,

$$\begin{cases} y = \dfrac{m^2 - x^2}{2x}, \\ 5x^4 - 2(m^2 + 2R^2)x^2 + m^4 = 0. \end{cases}$$

Une solution de ce système convient au problème si les valeurs de x et y sont positives, et ces conditions sont suffisantes, puisque alors l'équation $x^2 + y^2 = R^2$ montre que x et y seront inférieurs à R.

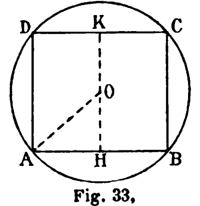


Fig. 33.

L'équation en x n'a de racines que si l'on a :

$$(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4 \geqslant 0,$$

ou évidemment

$$m^2 + 2R^2 - m^2\sqrt{5} \geqslant 0,$$

c'est-à-dire :

$$m^2 \leqslant \frac{2R^2}{\sqrt{5}-1}, \quad \text{ou} \quad m^2 < \frac{R^2(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Cette condition étant supposée vérifiée, l'équation en x a deux racines positives.

Comparons ces racines, ou plutôt leurs carrés, à m^2; substituant m^2 à la place de x^2 dans le premier membre de l'équation en x, on obtient le résultat :

$$4m^4 - 4m^2 R^2,$$

qui a le signe de

$$m^2 - R^2.$$

Donc, si l'on a $m^2 < R^2$, l'équation en x a une seule racine positive dont le carré est inférieur à m^2, et le problème a une seule solution, car, pour que la valeur de y soit positive, on doit avoir $x^2 < m^2$.

Si l'on a $m^2 > R^2$, les carrés des deux racines positives de l'équation en x sont en même temps supérieurs ou inférieurs à m^2; ils lui seront inférieurs, si leur demi-somme $\frac{m^2 + 2R^2}{5}$ est elle-même inférieure à m^2, c'est-à-dire si l'on a $m^2 > \frac{R^2}{2}$, ce qui est évident. Donc dans ce cas le problème a deux solutions, m^2 étant bien entendu inférieur à $\frac{R^2(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Le maximum de m^2 est $\frac{R^2(\sqrt{5}+1)}{2}$.

Les cas particuliers sont faciles à examiner.

Problème XV

Construire un triangle rectangle, connaissant le périmètre $2p$ et le rapport m de la somme des volumes engendrés par le triangle en tournant successivement autour des cotés de l'angle droit au volume engendré par le même triangle en tournant autour de l'hypoténuse.

Soient x et y les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse; en remarquant que la hauteur de l'hypoténuse est égale à $\frac{xy}{z}$, on a les équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2p, \\ \frac{1}{3}\pi(x^2y+xy^2)=\frac{1}{3}\pi z \,.\, \frac{x^2y^2}{z^2}\,.\, m, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x+y+z=2p, \\ z(x+y)=mxy, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre :

$$x^2+y^2=z^2.$$

La première donne :

$$x+y=2p-z,$$

et par suite la troisième :

$$xy=2p(p-z);$$

la seconde devient alors :

$$z(2p-z)=2pm(p-z),$$

ou

$$z^2-2p(m+1)z+2mp^2=0.$$

Une solution de cette équation convient au problème si elle est positive, et si l'équation

$$t^2-t(2p-z)+2p(p-z)=0,$$

qui a pour racines x et y, a alors deux racines positives.

L'équation en z a toujours deux solutions, car la quantité sous le radical

$$p^2(m+1)^2 - 2mp^2,$$

ou

$$p^2(m^2+1),$$

est toujours positive.

Ces deux solutions sont elles-mêmes positives.

L'équation en t n'a de solution que si l'on a :

$$(2p-z)^2 - 8p(p-z) \geqslant 0,$$

ou

$$z^2 + 4pz - 4p^2 \geqslant 0;$$

ou encore

$$\left(z + 2p(1+\sqrt{2})\right)\left(z - 2p(-1+\sqrt{2})\right) > 0,$$

c'est-à-dire, puisque z et p sont positifs,

$$z \geqslant 2p\left(-1+\sqrt{2}\right).$$

D'ailleurs ces solutions seront positives si l'on a :

$$z < p.$$

Donc une solution de l'équation en z ne donnera une solution du problème que si elle est inférieure à p et supérieure à $2p\left(-1+\sqrt{2}\right)$.

Substituant p à z dans le premier membre de l'équation en z, on trouve pour résultat $-p^2$; donc l'équation en z a toujours une racine et une seule inférieure à p.

Substituant maintenant $2p\left(-1+\sqrt{2}\right)$ à z, on a un résultat qui a le signe de

$$m - \frac{2(3\sqrt{2}-4)}{3-2\sqrt{2}},$$

ou de

$$m - 2\sqrt{2}.$$

Si donc on a $m < 2\sqrt{2}$, une seule racine, la plus grande, est supérieure à $2p\left(-1+\sqrt{2}\right)$; elle est plus grande que p et ne convient pas.

Si l'on a $m > 2\sqrt{2}$, les deux racines de l'équation en z sont supérieures à $2p(-1+\sqrt{2})$, car il en est de même de leur demi-somme $p(m+1)$, et la plus petite qui, seule, est inférieure à p, donne une solution du problème.

Le problème a donc une solution et une seule quand on a $m > 2\sqrt{2}$; sinon, il n'en a pas.

On a :

$$z = p\left(m+1-\sqrt{m^2+1}\right),$$

d'où l'on tire facilement x et y.

Exercices

1. — Trouver un nombre tel que son carré le surpasse de 287.

2. — Deux fontaines peuvent remplir un bassin en 12 heures quand elles coulent ensemble; quel est le temps nécessaire à chacune d'elles pour remplir ce bassin, sachant que la première coulant seule met 18 heures de plus que la seconde?

Généraliser.

3. — Deux capitaux sont prêtés à des taux différents; leur somme est 30000 francs; la somme des taux est 12. Le premier capital produit 660 francs et le second 1170 francs l'an; déterminer les deux capitaux et les taux des placements.

4. — Trouver deux nombres tels que leur somme, leur produit et la différence de leurs carrés soient égaux entre eux.

5. — Trouver un nombre de trois chiffres tel que la somme des carrés de ces chiffres soit 154, que le carré du chiffre moyen soit inférieur de 135 au double produit des deux autres, et qu'en ajoutant 99 à ce nombre, on trouve ce nombre lui-même renversé.

6. — Trouver deux nombres dont la somme ajoutée au produit fasse a, et tels que la somme de leurs carrés dépasse leur somme de b.

7. — Calculer les rayons de base d'un tronc de cône circonscrit à une sphère donnée, connaissant le rapport de la surface totale du tronc à celle de la sphère.

8. — Inscrire, dans un hémisphère donné, un tronc de cône dont le volume soit dans un rapport donné avec la sphère qui a pour diamètre la hauteur du tronc.

9. — Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

10. — Même question en remplaçant la somme par la différence.

11. — Construire un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la hauteur de l'hypoténuse.

12. — Par un point donné à l'intérieur d'un cercle, mener une corde divisée par ce point en moyenne et extrême raison.

13. — Même question en supposant le point à l'extérieur.

14. — Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la hauteur correspondante.

15. — Etant donné un angle droit XOY, et un point A situé sur la bissectrice de cet angle, mener par ce point une droite rencontrant OX et OY en deux points P et Q, et telle que PQ ait une longueur donnée.

16. — Etant donné un angle droit XOY et un point A dans son plan, mener par ce point une droite PQ telle que le triangle OPQ ait une surface donnée.

17. — Inscrire ou exinscrire dans l'angle A d'un triangle un rectangle de surface donnée.

18. — Trouver sur un côté d'un triangle un point tel que le produit de ses distances aux deux autres côtés ait une valeur donnée.

19. — Circonscrire à un cercle donné un trapèze isocèle de périmètre donné.

20. — Etant donné un triangle isocèle ABC rectangle en A, trouver sur AB un point M tel que le rapport de ses distances à C et au milieu de BC ait une valeur donnée.

21. — Construire un triangle rectangle, connaissant la hauteur de l'hypoténuse et la somme des côtés de l'angle droit.

22. — Construire un triangle isocèle, connaissant le périmètre et la somme de la base et de la hauteur.

23. — Construire un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la bissectrice de l'angle droit.

24. — Construire un triangle, connaissant deux côtés et la longueur de la bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle compris.

25. — Partager un trapèze par une parallèle aux bases en deux parties de rapport donné.

26. — Construire un triangle rectangle, connaissant la somme des côtés de l'angle droit et la somme des projections de la hauteur de l'hypoténuse sur les côtés de l'angle droit.

27. — Soient A et B deux points d'une circonférence donnée; trouver sur cette circonférence un point M tel que la somme MA+MB ait une valeur donnée.

28. — Même question en remplaçant la somme par la différence.

29. — Même question en remplaçant la somme par le produit.

30. — Trouver sur une circonférence un point M tel que le rapport de ses distances à une droite fixe et à un point fixe situé sur le diamètre perpendiculaire à la droite ait une valeur donnée.

LIVRE IV

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES

CHAPITRE PREMIER

PROGRESSIONS

§ 1er. — Progressions arithmétiques.

148. — Une *progression arithmétique* est une suite de nombres tels que la différence entre l'un de ces nombres et celui qui le précède soit égale à un nombre constant, appelé *raison* de la progression.

Si $$a, b, c, d, \ldots h, k, l,$$

sont les termes successifs d'une progression arithmétique de raison r, on a :

$$b - a = c - b = d - c = \ldots = k - h = l - k = r.$$

La progression est dite *croissante* ou *décroissante* suivant que la raison r est positive ou négative.

Résolvons d'abord la question suivante :

Connaissant le premier terme a *d'une progression arithmétique de raison* r, *calculer le terme* l *de la progression, dont le rang est* n.

Si a, b, c, ... h, k, l sont les termes de la progression, on a :

$$b = a + r,$$
$$c = b + r = a + 2r,$$
$$d = c + r = a + 3r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par suite on voit qu'*un terme quelconque de la progression est égal au premier terme augmenté du produit de la raison par le nombre des termes qui précèdent le terme considéré.*

Pour démontrer rigoureusement cette proposition, remarquons qu'elle est vraie pour b, c, d,... d'après les égalités précédentes; supposons-la vraie pour le terme de rang p; la valeur de ce terme sera $a+(p-1)r$; le terme suivant, de rang $p+1$, sera égal à $a+(p-1)r+r$, ou $a+pr$; donc la loi est générale.

Le terme l de rang n a par suite pour valeur

$$a+(n-1)r.$$

Exemple. — Dans la progression de raison 5, et de premier terme 4, quel est le dixième terme?

On a ici :

$$l=4+9\times 5=49.$$

Plus généralement, la formule

$$l=a+(n-1)r$$

permettra de calculer l'une des quatre quantités a, l, n, r, connaissant les trois autres.

Exemple. — Calculer la raison d'une progression arithmétique de 10 termes dont le premier est 49 et le dernier 4.

On a en général :

$$r=\frac{l-a}{n-1},$$

et ici

$$r=\frac{4-49}{9}=-5.$$

Remarque. — *Dans une progression arithmétique indéfiniment prolongée, les termes croissent au delà de toute limite en valeur absolue.*

Supposons que a soit le premier terme de la progression; le terme de rang n est $a+(n-1)r$; il est plus grand en valeur absolue qu'un nombre positif A donné à

l'avance si le nombre $n-1$ est supérieur à la valeur absolue de $\frac{A \mp a}{r}$, suivant que la progression est croissante ou décroissante, ce qui peut toujours être réalisé.

149. — *Insérer* n *moyens arithmétiques entre deux nombres donnés* a *et* b, c'est trouver n nombres $x_1, x_2, .. x_n$ tels que la suite $a, x_1, x_2, \dots x_n, b$ soit une progression arithmétique.

Si r est la raison de cette progression, on a :

$$b = a + (n+1)r,$$

et par suite

$$r = \frac{b-a}{n+1},$$

d'où l'on déduit en général :

$$x_p = a + pr = a + \frac{p(b-a)}{n+1}.$$

Exemple. — Insérer 6 moyens arithmétiques entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{9}{8}$.

On a ici :

$$r = \frac{\frac{9}{8} - \frac{2}{3}}{7} = \frac{11}{168},$$

et par suite

$$x_1 = \frac{123}{168}, x_2 = \frac{134}{168}, x_3 = \frac{145}{168}, x_4 = \frac{156}{168},$$

$$x_5 = \frac{167}{168}, x_6 = \frac{178}{168}.$$

Remarque. — *Si, entre deux termes consécutifs quelconques d'une progression arithmétique, on insère un même nombre* n *de moyens arithmétiques, on forme une seule et même progression arithmétique.*

Soit $a, b, c, d, \dots$ la progression donnée de raison r; puisque les différences $b-a, c-b, d-c, \dots$ sont toutes égales à r, les différentes progressions partielles que l'on forme en insérant n moyens arithmétiques entre a et b,

entre b et c, entre c et d, etc., ont toutes pour raison $\frac{r}{n+1}$; donc, en les écrivant les unes à la suite des autres, on forme une seule et même progression dont la raison est $\frac{r}{n+1}$.

Exemple. — Soit la progression

$$5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad 21.$$

En insérant 2 moyens entre deux termes consécutifs, on forme la progression

$$5, 6\frac{1}{3}, 7\frac{2}{3}, 9, 10\frac{1}{3}, 11\frac{2}{3}, 13, 14\frac{1}{3}, 15\frac{2}{3}, 17, 18\frac{1}{3}, 19\frac{2}{3}, 21.$$

150. — *Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique de* n *termes et de raison* r :

$$a, b, c, \ldots\ldots. h, k, l.$$

Soit f le terme qui en a p avant lui, et f' le terme qui en a p après lui, c'est-à-dire que f et f' sont deux termes *équidistants des extrêmes.*

On a d'abord :

$$f = a + pr;$$

ensuite, dans la progression renversée

$$l, k, h, \ldots c, b, a,$$

de raison $-r$, le terme f' en a p avant lui, et par suite on a :

$$f' = l - pr;$$

donc :

$$f + f' = a + l,$$

c'est-à-dire que *la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante*, et égale à $a + l$.

Ceci posé, soit

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l;$$

on a aussi, en renversant :

$$S = l + k + h + \ldots + c + b + a,$$

et en additionnant

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\dots+(h+c)$$
$$+(k+b)+(l+a);$$

chacune des sommes $a+l, b+k, c+h, \dots h+c, k+b, l+a$, en nombre égal à n, a pour valeur $a+l$, d'après ce que nous venons de dire ; on a donc :

$$2S=n(a+l),$$

ou

$$S=\frac{n(a+l)}{2},$$

ou encore en remplaçant l par sa valeur $a+(n-1)r$,

$$S=an+\frac{n(n-1)}{2}r.$$

Exemples. — 1° Calculer la somme des n premiers nombres entiers.

On a $a=1$, $l=n$, et par suite

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° Calculer la somme des n premiers nombres impairs.
On a $a=1$, $r=2$, et par suite

$$S=n+n(n-1)=n^2.$$

C'est ainsi que

$$1+3+5+7+9=5^2=25.$$

Remarque. — Les formules

$$\begin{cases} l=a+(n-1)r, \\ S=\dfrac{n(a+l)}{2}, \end{cases}$$

permettent de calculer deux des cinq quantités a, l, n, r, S, connaissant les trois autres. On a ainsi dix problèmes différents à résoudre ; ces problèmes sont du premier degré, sauf si l'on prend pour inconnues a et n ou l et n ; dans ces cas ils sont du second degré.

§ 2. — Progressions géométriques.

151. — Une *progression géométrique* est une suite de nombres tels que le rapport de l'un de ces nombres à celui qui le précède soit égal à un nombre constant appelé raison de la progression.

Si

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots\ h,\ k,\ l,$$

sont les termes successifs d'une progression géométrique de raison q, on a :

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots=\frac{k}{h}=\frac{l}{k}=q.$$

La progression est dite *croissante* ou *décroissante* suivant que la raison q est supérieure ou inférieure à 1 en valeur absolue. Quand la raison q est négative, les termes de la progression sont alternativement positifs et négatifs ; dans le cas contraire, ils sont tous de même signe ; dans tous les cas, ils croissent ou décroissent en valeur absolue, suivant que la progression est croissante ou décroissante.

Résolvons d'abord la question suivante :

Connaissant le premier terme d'une progression géométrique de raison q, *calculer le terme* l *de la progression, dont le rang est* n.

Si $a, b, c, \ldots h, k, l$ sont les différents termes de la progression, on a :

$$b=aq,$$
$$c=bq=aq^2,$$
$$d=cq=aq^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et par suite on voit, comme au n° 148, qu'*un terme quelconque de la progression est égal au premier terme multiplié par une puissance de la raison dont l'exposant est égal au nombre des termes qui précèdent le terme considéré.*

Donc, en général, on a :

$$l = aq^{n-1}.$$

Exemple. — Dans la progression de raison 2 et de premier terme 7, quel est le dixième terme ?

On a : $l = 7 \times 2^9 = 3584.$

Connaissant l, q et n, on aura a par la formule

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}.$$

Connaissant l, a et n, on aura q par la formule $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, si n est pair, et par la formule $q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, si n est impair.

Connaissant l, a, q, on aura n en cherchant quelle est la puissance de q égale à $\frac{l}{a}$.

152. — On sait que si a et b sont deux nombres positifs, on a :

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b;$$

ceci résulte de ce que dans le développement de la puissance n^{me} du binôme $a+b$, tous les termes sont affectés du signe $+$, et que les deux premiers termes de ce développement sont a^n et $na^{n-1}b$ (74).

Alors, si s est un nombre positif, on a :

$$(1+s)^n > 1 + ns,$$

et il en résulte *que les puissances successives d'un nombre $1+s$ supérieur à 1 augmentent au delà de toute limite;* car, si A est un nombre positif aussi grand qu'on le veut, pour avoir

$$(1+s)^n > A,$$

il suffit d'avoir

$$1 + ns > A,$$

ou

$$n > \frac{A-1}{s}.$$

Il en résulte que *les puissances successives d'un nombre positif inférieur à 1 tendent vers zéro;* car, si t est ce nombre, on a :

$$t^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^n},$$

et le nombre $\frac{1}{t}$ étant supérieur à 1, $\left(\frac{1}{t}\right)^n$ augmente au delà de toute limite, et son inverse tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment.

Nous en concluons que :

1° *Dans une progression géométrique croissante indéfiniment prolongée, les termes croissent au delà de toute limite en valeur absolue.*

2° *Dans une progression géométrique décroissante indéfiniment prolongée, les termes tendent vers zéro.*

En effet, le terme de rang n est

$$aq^{n-1},$$

en appelant a le premier terme et q la raison; donc, si q est supérieur à 1 en valeur absolue, q^{n-1} et par suite aq^{n-1} augmente en valeur absolue au delà de toute limite en même temps que n; si q est inférieur à 1 en valeur absolue, q^{n-1} et par suite aq^{n-1} tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

153. — *Insérer* n *moyens géométriques entre deux nombres donnés* a *et* b, c'est trouver n nombres $x_1, x_2, \ldots x_n$ tels que la suite $a, x_1, x_2, \ldots x_n, b$ soit une progression géométrique.

Si q est la raison de cette progression, on a :

$$b = aq^{n+1},$$

et par suite, si n est pair,

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},$$

et, si n est impair et $\frac{b}{a}$ positif,

$$q = \pm \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}};$$

d'où les valeurs de $x_1, x_2, \dots x_n$ se déduisent aisément.

En particulier, pour insérer un moyen géométrique entre a et b, on a :

$$q = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Remarque. — On verra comme au n° 149 que, *si entre deux termes consécutifs quelconques d'une progression géométrique on insère un même nombre* n *de moyens géométriques, on forme une seule et même progression géométrique.*

154. — *Trouver le produit des termes d'une progression géométrique de* n *termes et de raison* q.

Soit f le terme qui en a p avant lui, et f' le terme qui en a p après lui, c'est-à-dire que f et f' sont deux termes équidistants des extrêmes dans la progression

$$a, b, c, \dots h, k, l.$$

On a d'abord :

$$f = aq^p;$$

ensuite dans la progression renversée, de raison $\frac{1}{q}$, le terme f' en a p avant lui, et par suite on a :

$$f' = l\frac{1}{q^p},$$

donc

$$ff' = al,$$

c'est-à-dire que *le produit de deux termes équidistants des extrêmes est constant*, et égal à al.

Ceci posé, soit

$$P = abc \dots hkl;$$

on a aussi :

$$P = lkh \dots cba,$$

et par suite, en multipliant,

$$P^2 = (al)(bk)(ch) \dots (hc)(kb)(la).$$

Chacun des produits $al, bk, ch, \dots hc, kb, la$ en nombre

égal à n, a pour valeur al d'après ce qui précède ; donc

$$P^2=(al)^n;$$

d'ailleurs

$$l=aq^{n-1},$$

et par suite

$$P^2=(a^2q^{n-1})^n=a^{2n}q^{n(n-1)},$$

d'où, $n(n-1)$ étant un nombre pair,

$$P=\pm a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

l'examen des divers cas possibles montre que l'on doit toujours prendre le signe $+$, et écrire

$$P=a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On arrive encore à cette formule en remarquant que

$$P=(a)(aq)(aq^2)\dots(aq^{n-1}),$$

d'où

$$P=a^nq^{1+2+3+\dots+(n-1)},$$

ou, puisque

$$1+2+3+\dots(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$P=a^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

155. — *Trouver la somme des termes d'une progression géométrique de* n *termes et de raison* q

$$a, b, c,\dots h, k, l.$$

Soit

$$S=a+b+c+\dots+h+k+l;$$

on a :

$$Sq=aq+bq+cq+\dots+hq+kq+lq,$$

ou, puisque

$$b=aq, \quad c=bq,\dots$$
$$Sq=b+c+d+\dots+k+l+lq;$$

donc, en retranchant membre à membre, il vient :

$$S(q-1)=lq-a,$$

d'où

$$S=\frac{lq-a}{q-1},$$

ou encore, en remplaçant l par aq^{n-1},

$$S=a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

On arrive encore à cette formule en remarquant que

$$S=a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}$$
$$=a(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}),$$

et comme

$$q^n-1=(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})(q-1),$$

on a :

$$S=a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Exemple. — Trouver la somme des termes d'une progression géométrique de 10 termes, dont le premier terme est 5, et dont la raison est 2.

On a : $S=5\frac{2^{10}-1}{2-1}=5\times 1023=5115.$

Remarque. — Supposons la progression décroissante; alors on peut écrire :

$$S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Supposons maintenant que n augmente indéfiniment; alors q^n tend vers zéro (152) et il en est de même de $\frac{aq^n}{1-q}$; donc S tend vers $\frac{a}{1-q}$. On dit que $\frac{a}{1-q}$ est la somme des termes de la progression géométrique *indéfiniment décroissante* dont le premier terme est a et la raison q.

Exemple. — La somme des termes de la progression géométrique indéfiniment décroissante dont le premier terme est $\frac{1}{2}$ et la raison $\frac{1}{3}$ est $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}$ ou $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3^2}+\cdots+\frac{1}{2\times 3^{n-1}}\right)_{n=\infty}=\frac{3}{4}.$$

Exercices

1. — Dans une progression arithmétique les éléments sont a, l, r, S, n; calculer a et l, connaissant les autres éléments.
2. — Même question; calculer a et r.
3. — ——— ; ——— a et n.
4. — ——— ; ——— a et S.
5. — ——— ; ——— l et r.
6. — ——— ; ——— l et n.
7. — ——— ; ——— l et S.
8. — ——— ; ——— r et n.
9. — ——— ; ——— r et S.
10. — ——— ; ——— n et S.
11. — Quelle est la somme des nombres contenus dans la table de multiplication de Pythagore?
12. — Insérer 11 moyens arithmétiques entre 1 et 10.
13. — Dans une progression arithmétique, on connaît les termes de rangs p et q; calculer le terme de rang n.
14. — Partager 54 en 10 parties telles que chacune surpasse la précédente de $\frac{1}{3}$.
15. — Trouver une progression arithmétique dont fassent partie trois nombres donnés a, b, c.
16. — Si, dans une progression géométrique, on retranche chaque terme du précédent, les différences ainsi obtenues forment une nouvelle progression géométrique.
17. — Insérer 11 moyens géométriques entre 1 et 10.
18. — Dans une progression géométrique on connaît les termes de rangs p et q; calculer le terme de rang n.
19. — Dans une progression géométrique de premier terme égal à 6, et de raison $\frac{12}{11}$, assigner le rang d'un terme certainement plus grand que 1 000 000.

20. — Dans une progression géométrique de premier terme égal à 6 et de raison $\frac{99}{100}$, assigner le rang d'un terme certainement plus petit que $\frac{1}{100000}$.

21. — Un échiquier a 64 cases; sur la première on met 1 franc, sur la seconde 2 francs, sur la troisième 4 francs; et ainsi de suite. Quelle est la somme totale mise sur l'échiquier?

22. — Trouver la somme des puissances p^{mes} des termes d'une progression géométrique.

23. — Quel est le premier terme d'une progression géométrique dont on connaît la somme des termes, le nombre des termes et la raison?

24. — Quelle est la somme des termes d'une progression géométrique indéfiniment décroissante dont le premier terme est 50 et la raison $\frac{5}{8}$?

25. — Trouver trois nombres en progression géométrique, connaissant leur somme et celle de leurs carrés.

26. — Trouver trois nombres en progression géométrique, connaissant celui du milieu et la somme des extrêmes.

27. — Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme des extrêmes et celle des moyens.

28. — Trouver trois nombres en progression géométrique, connaissant leur somme et celle de leurs inverses.

29. — Etant donné un triangle, on joint les milieux des trois côtés; on forme ainsi un nouveau triangle sur lequel on répète la même opération; et ainsi de suite. Quelle est la limite de la somme des aires des triangles ainsi formés?

30. — Etant donnée une sphère de rayon R, on y inscrit un cylindre dont la hauteur est égale à son diamètre de base, puis une sphère dans ce cylindre, et ainsi de suite. Quelle est la somme des surfaces de toutes ces sphères? quelle est la somme de leurs volumes?

CHAPITRE II

LOGARITHMES

§ 1er. — Définition et Propriétés des logarithmes.

156. — Soit une progression géométrique de raison positive q dont le premier terme est égal à 1,

G) $$1,\ q,\ q^2, \dots\ q^n, \dots$$

et une progression arithmétique de raison r, dont le premier terme est égal à 0,

A) $$0,\ r,\ 2r, \dots\ nr \dots ;$$

chaque terme de la progression arithmétique est appelé *logarithme* du terme correspondant de la progression géométrique; ainsi nr est le logarithme de q^n; on écrit :

$$nr = \log q^n.$$

Nous ne définissons ainsi que les logarithmes des nombres $1,\ q,\ q^2, \dots\ q^n$.

Pour aller plus loin, nous prolongerons d'abord les deux progressions (G) et (A) vers la gauche, de sorte que leurs termes successifs seront pour (G) à partir de 1, $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots \frac{1}{q^n}, \dots$ et pour (A), à partir de 0, $-r$, $-2r, \dots$ $-nr, \dots$

Alors, chaque terme de la progression (G) ayant toujours pour logarithme le terme correspondant de la progression (A), le logarithme de $\frac{1}{q^n}$ sera $-nr$.

Ceci posé, insérons p moyens géométriques positifs entre chacun des termes de (G) et p moyens arithmétiques entre chacun des termes de (A); nous formerons ainsi deux nouvelles progressions, l'une géométrique (G')

de raison $q' = \sqrt[p+1]{q}$, l'autre arithmétique (A′) de raison $r' = \frac{r}{p+1}$ (149, 153):

$$\text{G}') \quad \ldots \frac{1}{q'^s}, \ldots \quad \frac{1}{q'^2}, \quad \frac{1}{q'}, 1, q', q'^2, \ldots q'^s, \ldots$$

$$\text{A}') \ldots -sr', \ldots -2r' \quad -r', 0, r' \quad 2r', \ldots sr', \ldots$$

et, comme ces deux progressions comprennent les progressions (G) et (A), nous dirons que le logarithme d'un terme de (G′) est le terme correspondant de (A′).

Soit maintenant m un nombre quelconque positif; il est compris entre deux termes consécutifs a et b de la progression (G′), et nous définirons son logarithme en disant qu'il est compris entre les logarithmes des deux termes a et b.

Cette définition est légitime parce qu'on voit tout de suite que si x et y sont deux nombres dont on a pu définir les logarithmes rigoureusement, par l'insertion de moyens géométriques et arithmétiques entre les termes de (G) et de (A) (le nombre des moyens employés pour définir le logarithme de x n'étant pas nécessairement le même que le nombre des moyens employés pour définir le log de y), et si l'on a $x > y$, on a aussi toujours $\log x > \log y$, ou $\log x < \log y$, suivant la nature des progressions : on a toujours $\log x > \log y$, si les deux progressions sont croissantes ou décroissantes ensemble; on a au contraire $\log x < \log y$, si les deux progressions sont l'une croissante, l'autre décroissante.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette proposition qui est bien facile à démontrer, et presque évidente.

La définition précédente permet de calculer avec une aussi grande approximation qu'on le veut le logarithme du nombre positif m; en effet, en insérant p moyens entre les termes successifs de (G) et de (A), on renferme le logarithme de m entre deux nombres qui ne diffèrent que de $r' = \frac{r}{p+1}$, et en prenant p suffisamment grand,

cette quantité r' peut devenir aussi petite qu'on le veut.

Remarquons que les nombres positifs seuls ont des logarithmes; ces logarithmes sont eux-mêmes positifs ou négatifs.

Si par exemple les deux progressions (G) et (A) sont croissantes, les nombres supérieurs à 1 ont des logarithmes positifs; les nombres inférieurs à 1 ont des logarithmes négatifs.

Le logarithme d'un nombre infiniment grand est alors lui-même infiniment grand et positif; le logarithme d'un nombre infiniment petit est infiniment grand et négatif, car, si n augmente indéfiniment, $\frac{1}{q^n}$ tend vers zéro, tandis que $-nr$ devient infiniment grand et négatif.

157. — Ce que nous avons dit plus haut montre suffisamment que, inversement, à un nombre quelconque l positif ou négatif, correspond un nombre m et un seul qui admet l pour logarithme.

Si l appartient à la progression (A) ou à une progression (A'), m est le nombre correspondant de la progression (G) ou (G'). Si l tombe entre deux termes consécutifs de (A'), m est compris entre les deux termes de (G') qui ont pour logarithmes ces deux nombres; cette définition est légitime et permet de calculer m avec une aussi grande approximation qu'on le veut; en effet, en insérant p moyens entre les termes successifs de (G) et de (A), on renferme m entre deux nombres dont le rapport est $q' = \sqrt[p+1]{q}$, et nous allons faire voir que ce rapport peut être rendu aussi voisin de 1 qu'on le veut, à condition de prendre p suffisamment grand; donc la différence entre les deux nombres qui renferment m peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Pour montrer que $\sqrt[p+1]{q}$ tend vers 1 lorsque p augmente indéfiniment, supposons d'abord q supérieur à 1; il faut faire voir que l'on peut prendre p tel que l'on ait :

$$\sqrt[p+1]{q} < 1 + a,$$

a étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut; cette inégalité revient à

$$q < (1+a)^{p+1},$$

à laquelle on sait que l'on peut satisfaire (152).

Si q est inférieur à 1, $\frac{1}{q}$ est supérieur à 1 et $\frac{1}{\sqrt[p+1]{q}}$ ou $\sqrt[p+1]{\frac{1}{q}}$ tend vers 1; il en est donc de même de son inverse $\sqrt[p+1]{q}$.

Nous donnerons plus loin des exemples des calculs précédents.

158. — L'utilité des logarithmes, dont l'invention est due à Néper, est suffisamment indiquée par le théorème fondamental suivant :

Le logarithme du produit de deux nombres a *et* b *est égal à la somme de leurs logarithmes.*

Supposons d'abord que les deux facteurs a et b appartiennent à une progression telle que (G'); si a et b sont de la forme q'^n et q'^p, leur produit ab est q'^{n+p}; d'ailleurs on a :

$$\log q'^n = nr',$$
$$\log q'^p = pr',$$
$$\log q'^{n+p} = (n+p)r',$$

et par suite

$$\log q'^{n+p} = \log q'^n + \log q'^p,$$

ou

$$\log ab = \log a + \log b, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si a est de la forme q'^n et b de la forme $\frac{1}{q'^p}$, le produit ab est égal à q'^{n-p} ou à $\frac{1}{q'^{p-n}}$, suivant que l'on a $n > p$ ou $n < p$; dans tous les cas le logarithme de ab est $(n-p)r'$, égal à la somme des logarithmes nr' et $-pr'$ des deux facteurs a et b, c. q. f. d.

Enfin si a et b sont tous deux de la forme $\frac{1}{q'^n}$ et $\frac{1}{q'^p}$,

leur produit est $\frac{1}{q'^{n+p}}$, dont le logarithme est $-(n+p)r'$, nombre égal à la somme des logarithmes $-nr'$ et $-pr'$ des deux facteurs, c. q. f. d.

Si maintenant les nombres a et b n'appartiennent pas à la progression (G), il est clair d'après ce que nous venons de dire que si par exemple les deux progressions (G) et (A) sont croissantes et si l'on a :

$$a' < a < a'', \qquad b' < b < b'',$$

a', a'', b', b'' étant des nombres de la progression (G′), on aura :

$$\log a' + \log b' < \log ab < \log a'' + \log b'',$$

et que par suite comme la quantité $\log a + \log b$ satisfait aux mêmes inégalités, on a encore :

$$\log ab = \log a + \log b, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

159. — Les conséquences du théorème précédent sont nombreuses et s'énoncent aisément.

D'abord, il est clair que :

Le logarithme du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes de tous les facteurs.

Car, si l'on a trois facteurs a, b, c par exemple, on a successivement, en vertu du théorème précédent,

$$\log abc = \log (ab) + \log c = \log a + \log b + \log c;$$

et ainsi de suite.

En particulier, *le logarithme de la* n^me^ *puissance d'un nombre* a *est égal à* n *fois le logarithme de ce nombre :*

$$\log a^n = n \log a.$$

Ensuite on peut dire que :

Le logarithme d'un quotient est égal à la différence entre le logarithme du dividende et celui du diviseur.

Le logarithme de la racine n^me^ *arithmétique d'un*

nombre est égal au quotient du logarithme de ce nombre divisé par n.

En effet 1° si $\frac{a}{b} = c$, on a $a = bc$, d'où :

$$\log a = \log b + \log c,$$

et par suite

$$\log c = \log a - \log b;$$

2° si l'on a

$$b = \sqrt[n]{a}, \quad \text{ou} \quad a = b^n,$$

on a

$$\log a = n \log b,$$

d'où

$$\log b = \frac{1}{n} \log a.$$

On peut ajouter que, *si le rapport des logarithmes de deux nombres* a *et* b *est un nombre commensurable positif égal à la fraction ordinaire* $\frac{p}{q}$, *on a :*

$$a = \sqrt[q]{b^p};$$

de même, si le rapport considéré est un nombre commensurable négatif égal en valeur absolue à la fraction ordinaire $\frac{p}{q}$, *on a :*

$$a = \frac{1}{\sqrt[q]{b^p}}.$$

En effet la première égalité donne :

$$\log a = \frac{1}{q}(p \log b) = \frac{p}{q} \log b;$$

la seconde donne :

$$\log a = \log 1 - \frac{1}{q}(p \log b) = -\frac{p}{q} \log b,$$

puisque le logarithme de 1 est zéro.

Une expression telle que

$$\frac{a^m b^n \sqrt[p]{c^q}}{a'^{m'} b'^{n'} \sqrt[p']{c'^{q'}}}$$

aura en vertu des propositions précédentes son logarithme égal à

$$m \log a + n \log b + \frac{q}{p} \log c - m' \log a' - n' \log b'$$
$$- \frac{q'}{p'} \log c'.$$

On voit donc que si l'on possède une *table de logarithmes*, c'est-à-dire une table donnant les logarithmes des nombres et les nombres qui correspondent à des logarithmes donnés, on pourra ramener les multiplications à des additions, les divisions aux soustractions, les extractions de racines à des divisions, et que par suite on exécutera avec la plus grande rapidité des calculs qui demandent beaucoup de temps et d'attention quand on les fait directement.

Le paragraphe suivant mettra suffisamment en évidence les avantages incomparables de l'emploi des logarithmes pour effectuer les calculs numériques.

§ 2. — Logarithmes vulgaires. Tables de logarithmes.

160. — Il y a une infinité de *systèmes de logarithmes*, car dans les progressions fondamentales (G) et (A) les nombres q et r sont arbitraires. La *base* d'un système de logarithmes est le nombre dont le logarithme est égal à 1 dans ce système.

Le système de logarithmes que l'on emploie pour ainsi dire uniquement a pour base 10; ce sont les logarithmes *vulgaires* ou *décimaux*. Leur emploi présente des avantages que la suite mettra en évidence.

Dans ce système, les progressions fondamentales sont :

$$\ldots \frac{1}{10^n}, \ldots \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, 1, 10, 10^2, 10^3, \ldots 10^n, \ldots$$
$$\ldots -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

Le logarithme de 10^n est n.

Donc le logarithme d'un nombre compris entre 10^n et 10^{n+1} est compris entre n et $n+1$; de même le logarithme d'un nombre compris entre $\frac{1}{10^n}$ et $\frac{1}{10^{n+1}}$ est compris entre $-n$ et $-(n+1)$.

Soit a un nombre supérieur à 1, et soit p le nombre des chiffres de sa partie entière, à partir du premier chiffre significatif à gauche. Ce nombre est compris entre 10^{p-1} et 10^p; par suite son logarithme est de la forme $p-1+l$, l étant un nombre positif plus petit que l'unité.

Le nombre entier positif ou nul $p-1$ est la *caractéristique* de log a ; le nombre l s'écrit sous forme décimale, et s'appelle la *partie décimale* de log a.

On voit que *la caractéristique du logarithme d'un nombre* a *supérieur à* 1 *est égale au nombre des chiffres de la partie entière de ce nombre, diminué de* 1.

Soit maintenant a un nombre inférieur à 1, mis sous forme décimale, et soit p le nombre de zéros comptés après la virgule jusqu'au premier chiffre significatif à gauche; le nombre a est compris entre $\frac{1}{10^p}$ et $\frac{1}{10^{p+1}}$; par suite son logarithme est compris entre $-p$ et $-(p+1)$; on peut le mettre sous la forme $-(p+1)+l$, l étant un nombre positif plus petit que l'unité; le nombre entier négatif $-(p+1)$ est encore la caractéristique de log a, l en est sa partie décimale.

La caractéristique du logarithme d'un nombre a *inférieur à* 1 *est égale au nombre des zéros qui figurent dans ce nombre écrit sous forme décimale, depuis la virgule jusqu'au premier chiffre significatif à gauche, augmenté de* 1.

Par exemple, la caractéristique du logarithme de 0,02 est -2; la partie décimale est 0,301 ; au lieu d'écrire :

$$\log 0{,}02 = -2 + 0{,}301,$$

on écrit en abrégé :

$$\log 0{,}02 = \bar{2}{,}301.$$

Toutes les fois que nous rencontrerons une telle écriture, il faut l'interpréter de la même façon ; c'est ainsi que

$$\bar{3},4771 = -3 + 0,4771.$$

161. — L'avantage fondamental des logarithmes décimaux consiste dans la propriété suivante :

Si deux nombres a *et* a' *ne diffèrent que par la place de la virgule (ou, s'ils sont entiers, par les nombres des zéros qui les terminent), leurs logarithmes ont même partie décimale, et par suite ne diffèrent que par leurs caractéristiques.*

En effet, si a est le plus grand des nombres donnés, d'après l'énoncé le rapport $\frac{a}{a'}$ est une certaine puissance de 10, 10^n ; on a donc :

$$\log a - \log a' = \log 10^n = n,$$

et par suite

$$\log a = n + \log a',$$

ce qui démontre bien la proposition énoncée.

Ainsi le logarithme de 0,02 étant $\bar{2},301$, celui de 2000 sera 3,201 ; celui de 0,000002 sera $\bar{6},201$.

162. — Une *table de logarithmes* permet de calculer seulement avec une approximation déterminée le logarithme d'un nombre donné, ou bien inversement de trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.

Avant de dire comment on se sert d'une table de logarithmes, nous allons montrer sur des exemples comment, en appliquant ce qui a été dit aux nos 156 et 157, on peut résoudre les mêmes questions sans table de logarithmes, et par suite, comment on peut construire une table de logarithmes, à défaut d'autres procédés plus rapides.

1° Soit à calculer le logarithme de 37 avec 4 décimales. La caractéristique est 1 ; la partie décimale est donc seule à calculer ; c'est la même que celle du logarithme de 3,7 ; et comme le logarithme de 3,7 a pour caractéristique 0, c'est le logarithme de 3,7.

Entre 1 et 10 insérons un moyen géométrique ; ce sera $\sqrt{10} = 3,162$, dont le logarithme est 0,5, moyen arithmétique entre 0 et 1, logarithmes de 1 et 10.

Le logarithme de 3,7 est compris entre 0,5 et 1.

Entre 3,162 et 10 insérons un moyen géométrique ; ce sera $\sqrt{3,162 \times 10} = 5,623$, dont le logarithme est

$$\frac{0,5+1}{2} = 0,75.$$

Continuons de même ; nous aurons le tableau suivant :

Nombres.	Logarithmes.
$\sqrt{3,162 \times 5,623} = 4,217$	0,625
$\sqrt{3,162 \times 4,217} = 3,652$	0,5625
$\sqrt{3,652 \times 4,217} = 3,924$	0,59375
$\sqrt{3,652 \times 3,924} = 3,785$	0,578125
$\sqrt{3,652 \times 3,785} = 3,718$	0,570313
$\sqrt{3,652 \times 3,718} = 3,685$	0,566407
$\sqrt{3,685 \times 3,718} = 3,701$	0,568360
$\sqrt{3,685 \times 3,701} = 3,693$	0,567384
$\sqrt{3,693 \times 3,701} = 3,697$	0,567872
$\sqrt{3,697 \times 3,701} = 3.699$	0,568116
$\sqrt{3,699 \times 3,701} = 3,700$	0,568238

Le logarithme de 3,7 est donc 0,5682, à $\frac{1}{10^4}$ près.

Ce résultat est exact.

On a fait les calculs en employant les méthodes abrégées du *Cours d'arithmétique ;* dans la colonne des logarithmes, on a gardé 6 chiffres décimaux, pour ne pas accumuler les erreurs.

Le calcul peut encore s'abréger beaucoup en remarquant que si a et b sont deux nombres voisins ($a > b$) on a :

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{2(a+b)+4\sqrt{ab}};$$

donc, en prenant $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$, on commet une erreur par excès moindre que $\frac{(a-b)^2}{8b}$. Ici on voit tout de suite que l'on peut appliquer cette simplification dès qu'il s'agit du calcul de $\sqrt{3,652 \times 3,785}$: on supprime ainsi plus de la moitié du travail, puisqu'une moyenne arithmétique entre deux nombres voisins se prend à vue.

2° S'il s'agit de chercher le nombre qui correspond à un logarithme donné, on fera un calcul tout semblable ; mais cette fois on sera guidé dans l'ordre des opérations par la connaissance du logarithme.

Voici un autre procédé pour calculer le logarithme d'un nombre a que l'on peut toujours supposer compris entre 0 et 10. Le logarithme de a^n est $n \log a$; si a^n a p chiffres à sa partie entière, on a :

$$p - 1 < \log (a^n) < p,$$

et par suite

$$\frac{p-1}{n} < \log a < \frac{p}{n}.$$

Si donc l'exposant n est assez grand pour que $\frac{1}{n}$ soit inférieur à $\frac{1}{10^4}$, on pourra, en déterminant p, trouver $\log a$ à moins de $\frac{1}{10^4}$. A cet effet on cherchera, par des élévations successives au carré, les nombres de chiffres des parties entières des diverses puissances $a^2, a^4, a^8, \ldots$ de a. On ira jusqu'à la puissance $a^{2^{14}}$, puisque l'on a $2^{14} = 16384$.

Ces multiplications successives se feront par la méthode abrégée en gardant chaque fois quatre chiffres au résultat, et se souvenant que le nombre des chiffres de la partie entière du carré d'un nombre a est égal au double du nombre des chiffres de la partie entière de a ou à ce double diminué d'une unité suivant les cas : la distinction se fait

d'elle-même d'après l'opération. Par suite, dans le calcul on ne se préoccupera en aucune façon des virgules.

Si le nombre donné est 3,7 par exemple, on a le tableau suivant :

Exposants.	Premiers chiffres des puissances de 3,7.	Nombres de chiffres.
1	3700	1
2	1369	2
2^2	1874	3
2^3	3511	5
2^4	1233	10
2^5	1521	19
2^6	2314	37
2^7	5354	73
2^8	2867	146
2^9	8220	291
2^{10}	6757	582
2^{11}	4566	1164
2^{12}	2085	2328
2^{13}	4347	4655
2^{14}	1890	9310

Divisant 9309 par 16384, par la méthode abrégée, on trouve 0,5682 pour logarithme de 3,7.

Ce résultat est exact.

On doit remarquer que l'accumulation des erreurs, qui ici ne peuvent se compenser, est telle que les premiers chiffres trouvés pour $(3,7)^{2^{14}}$ ne sont pas en réalité les premiers chiffres de ce nombre ; mais ce qu'on a en vue c'est la détermination du nombre des chiffres de la partie entière de $(3,7)^{2^{14}}$, et ce résultat est obtenu exactement.

On pourrait abréger les opérations, en ne gardant que trois chiffres au résultat à partir de 2^8, et deux seulement à partir de 2^{11} ; le but que l'on poursuit n'en serait pas moins atteint.

163. — On peut construire des tables de logarithmes

plus ou moins étendues, permettant d'effectuer les calculs avec plus ou moins de précision.

Les principes sur lesquels on s'appuie pour faire usage d'une table de logarithmes sont toujours les mêmes; d'ailleurs, chaque table particulière comporte une instruction qu'il faut avoir soin de lire attentivement avant de se servir de la table. Nous nous contenterons donc d'indiquer comment on peut se servir de la table de logarithmes à quatre décimales placée à la fin de ce volume (Table I); comme tables à cinq décimales, nous signalerons celles publiées par J. Bourget (librairie Belin).

La Table I placée à la fin de ce volume contient avec quatre décimales les parties décimales des logarithmes des nombres depuis 100 jusqu'à 999. Pour trouver par exemple la partie décimale du logarithme de 478, on cherchera 47 dans la colonne intitulée N, puis sur la ligne en face de 47, on cherchera le nombre qui se trouve dans la colonne surmontée en haut du chiffre 8, dernier chiffre du nombre donné : c'est 6794. De même pour trouver la partie décimale du logarithme de 200, on cherche 20 dans la colonne N, et dans la ligne qui commence par 20, on cherche le nombre situé dans la colonne surmontée en haut du chiffre 0 : c'est 3010. Les colonnes 0, 1, 2, 3, 4 sont toutes au verso des pages, les colonnes 5, 6, 7, 8, 9 au recto.

Ceci posé :

1° *Soit à chercher le logarithme d'un nombre donné sous forme décimale.*

On détermine d'abord à vue la caractéristique du logarithme; ensuite, on place par la pensée la virgule dans le nombre donné, de façon que le nouveau nombre obtenu ait une partie entière de trois chiffres; ce nombre est donc de la forme $N + a$, N étant compris entre 100 et 1000, a étant inférieur à 1, et il suffit de chercher la partie décimale du logarithme de $N + a$. Cette partie décimale est comprise entre celle du logarithme de N et celle du logarithme de $N + 1$, nombres tous deux inscrits dans la table : on voit d'ailleurs par l'inspection de la

table que les différences $\log N - \log(N-1)$, $\log(N+1) - \log N$, $\log(N+2) - \log(N+1)$, sont sensiblement égales ; donc, dans les environs du nombre N, à des accroissements égaux du nombre correspondent des accroissements égaux du logarithme : si donc d est la différence $\log(N+1) - \log N$, différence qui se calcule à vue en unités du quatrième ordre décimal, la partie décimale du logarithme de $N+a$ sera celle de $\log N$, augmentée de la quantité ad, exprimée en unités du quatrième ordre décimal.

Soit par exemple à calculer le logarithme de $\pi = 3,1416$. La caractéristique est 0 ; la partie décimale du logarithme de 314 est 4969 ; la différence $\log 315 - \log 314$ est de 14 unités du quatrième ordre décimal ; on a $14 \times 0,16 = 2,24$; et par suite, puisque nous ne gardons que quatre chiffres décimaux :

$$\log \pi = 0,4969 + 0,0002 = 0,4971.$$

On écrit :

$$\begin{array}{ll} \log 3,14 = 0,4969 & \qquad 14 \times 0,16 = 2,24 \\ 2 & \\ \hline \log 3,1416 = 0,4971. & \end{array}$$

Avec un peu d'habitude, un tel calcul se fait de tête, en regardant simplement la table. C'est ainsi que l'on trouve

$$\begin{aligned} \log 271,83 &= 2,4343, \\ \log 0,098976 &= \bar{2},9955, \\ \log 0,0036305 &= \bar{3},5600. \end{aligned}$$

2° *Soit à chercher le nombre qui correspond à un logarithme donné.*

On fait le calcul inverse. Si par exemple le logarithme donné est 0,4971, on cherche dans la table le nombre 314 dont la partie décimale du logarithme est 4969, nombre le plus voisin possible de 4971 et plus petit que 4971 ; on remarque la différence 2 entre 4971 et 4969, et la diffé-

rence 14 entre les parties décimales de log 315 et log 314; on divise 2 par 14, et l'on prend le quotient à un dixième près par défaut ou par excès, 0,1 ; le nombre formé par les quatre premiers chiffres du nombre cherché est 3141; il ne reste plus qu'à placer la virgule convenablement, ce qui se fait en regardant la caractéristique : le nombre cherché est 3,141.

On trouvera de même

pour le logarithme	3,3495	le nombre	2236,
—	$\bar{2}$,1505	—	0,01414,
—	$\bar{5}$,9916	—	0,00009808.

164. — On peut résoudre les mêmes problèmes à l'aide de la Table II, qui est une table d'*antilogarithmes* à quatre décimales; elle contient les nombres compris entre 1000 et 10000 dont les parties décimales des logarithmes sont successivement 000, 001, 002, ... 998, 999 : elle est disposée comme la Table I.

L'usage d'une telle table se comprend tout de suite.

1° *Soit à chercher le nombre qui correspond à un logarithme donné.*

Soit, par exemple, $\bar{2}$,3497 le logarithme donné : on cherche 34 dans la colonne L, et, dans la ligne qui est en face de 34, on cherche le nombre 2234 situé dans la colonne surmontée du chiffre 9; la différence entre ce nombre et le suivant (celui qui correspond à 350) est 5; le produit de cette différence 5 par le nombre 0,7 que l'on obtient en faisant exprimer des dixièmes au dernier chiffre du logarithme donné, est 3,5, ou en ne gardant que les unités, et forçant le chiffre 3 comme d'habitude, 4; le nombre cherché commence donc par 2234 + 4 ou 2238; il ne reste plus qu'à placer la virgule, ce qui se fait en regardant la caractéristique : le nombre cherché est 0,02238.

2° *Soit à chercher le logarithme d'un nombre donné sous forme décimale.*

On fera le calcul inverse du précédent; mais il est préférable de se servir de la Table I, de même que, pour

résoudre le problème précédent, la Table II est plus avantageuse.

165. — On voit que les Tables I et II, prises ensemble ou isolément, permettent d'effectuer à l'aide de logarithmes des calculs dans lesquels on conserve les quatre premiers chiffres des nombres à partir du premier chiffre significatif. Le résultat lui-même sera obtenu avec quatre chiffres ; mais il est trop clair qu'on ne peut répondre en aucune façon du dernier, surtout si le calcul est un peu long : en général on peut compter avec une quasi-certitude sur les trois premiers.

Pour effectuer un calcul logarithmique, on sait que si le résultat du calcul est donné par une série de multiplications, divisions, élévations à des puissances, extractions de racines, on est ramené à des additions ou soustractions de logarithmes, à des multiplications ou divisions de logarithmes par des nombres entiers. Ces opérations ne demandent aucune explication particulière si les logarithmes sur lesquels on opère ont tous leurs caractéristiques positives, et si l'on ne rencontre que des soustractions possibles, au sens arithmétique; examinons le cas où certains de ces logarithmes ont des caractéristiques négatives.

Soit, par exemple, l'addition

$$2,9141 + \bar{5},6117 + \bar{3},9171.$$

On additionne comme d'habitude en commençant par la droite, et on trouve la partie décimale 4429 avec la retenue 2; alors on dit 2 et 2, 4, et — 5, — 1, et — 3, — 4; le résultat est $\bar{4},4429$. Ceci résulte de ce que, d'après les conventions faites, $\bar{5},6117$ représente le nombre $-5+0,6117$, $\bar{3}$;9171 représente le nombre $-3+0,9171$, et que pour calculer la valeur du polynôme

$$2,9141 - 5 + 0,6117 - 3 + 0,9171,$$

on peut calculer d'abord la somme

$$0,9141 + 0,6117 + 0,9171,$$

puis la somme 2 — 5 — 3, ce qui correspond aux opérations faites.

De même, s'il faut retrancher 3,9824 de 2,3485, on retranchera 9824 de 3485, ce qui donnera 3661 avec la retenue 1; on dira alors 3 et 1 de retenue, 4; 4 de 2 reste —2; le résultat est $\bar{2}$,3661. En effet la différence 2,3485—3,9824 peut s'écrire sous la forme (1,3485 —0,9824)+(1—3) ou encore (1,3485—0,9824)+(2 —4), ce qui correspond aux opérations faites.

On expliquera de même les soustractions :

$\bar{2}$,5489	2,5489	$\bar{2}$,5489	$\bar{5}$,5489
5,7946	$\bar{5}$,7946	$\bar{5}$,7946	$\bar{2}$,7946
$\bar{8}$,7543	6,7543	2,7543	$\bar{4}$,7543.

Pour multiplier un logarithme à caractéristique négative par un nombre entier, on fera les mêmes remarques que pour l'addition; ainsi

$$\bar{3},5346 \times 4 = \overline{10},1384.$$

On a multiplié la partie décimale par 4, ce qui a donné 1384 avec la retenue 2, et on a dit 4 fois —3, — 12, et 2 de retenue, —10.

Enfin pour diviser un logarithme à caractéristique négative par un nombre entier, on fait le calcul inverse du précédent; pour diviser par exemple $\overline{10}$,1384 par 4, on prend le multiple de 4 immédiatement supérieur à 10, soit 12; et l'on dit, le quart de —12 est —3; je retiens 2; le quart de 21 est 5; je retiens 1 ; etc. Le résultat est $\bar{3}$,5346.

On a de même :

$$\frac{\bar{6},2175}{3} = \bar{2},0725, \qquad \frac{\bar{7},3268}{3} = \bar{3},7756.$$

166. — Pour retrancher *a* de *b*, il suffit d'ajouter —*a* à *b;* donc, pour retrancher un logarithme d'un autre,

il suffit d'ajouter à celui-ci la différence entre 0 et le premier, écrite elle-même sous forme de logarithme. On ramène ainsi une soustraction à une addition, ce qui peut être avantageux si l'on a à faire plusieurs additions et soustractions successives.

La différence entre 0 et un logarithme, écrite sous forme de logarithme, est le *complément* de ce logarithme; le complément du logarithme de a est le *cologarithme* de a.

Le complément d'un logarithme s'écrit à vue : soit à former le complément de 3,2937; en faisant la soustraction

$$\begin{array}{r} 0{,}0000 \\ 3{,}2937 \\ \hline \bar{4}{,}7063 \end{array}$$

on trouve $\bar{4},7063$; de même le complément de $\bar{3},2937$ est 2,7063. On voit que l'on a la règle pratique suivante :

1° *On ajoute* 1 *à la caractéristique du logarithme donné et on change le signe de la somme obtenue : c'est la caractéristique du complément;*

2° *on remplace chacun des chiffres de la partie décimale par son complément à* 9, *ce qui se fait à vue, sauf le dernier chiffre significatif, qui se remplace par son complément à* 10; *on obtient ainsi la partie décimale du complément.*

Exemples :

Si $\log a = 0{,}1980$, on a $\operatorname{colog} a = \bar{1}{,}8020$;
si $\log a = \bar{5}{,}0800$, on a $\operatorname{colog} a = 4{,}9200$;
si $\log a = 7{,}3972$, on a $\operatorname{colog} a = \bar{8}{,}6028$.

167. — Donnons maintenant des exemples de calculs logarithmiques.

1° Soit à calculer

$$x = \frac{3{,}217 \times \overline{0{,}1691}^2}{2{,}614 \times \sqrt[3]{37{,}93}}.$$

On a la disposition suivante :

$$\log 3{,}217 = 0{,}5075 \qquad \log 0{,}1691 = \bar{1}{,}2282$$
$$2 \log 0{,}1691 = \bar{2}{,}4564 \qquad \log 2{,}614 = 0{,}4173$$
$$\text{colog}\ 2{,}614 = \bar{1}{,}5827 \qquad \log 37{,}93 = 1{,}5790$$
$$\frac{1}{3}\,\text{colog}\ 37{,}83 = \bar{1}{,}4737 \qquad \frac{1}{3}\log 37{,}93 = 0{,}5263$$
$$\log x = \bar{2}{,}0203$$
$$x = 0{,}01048.$$

2° Calculer le poids d'une sphère pleine en or, dont le rayon est $13^{cm},47$, sachant que la densité de l'or est 19,26.

Si x est le poids cherché exprimé en kilogrammes, on a :

$$x = \frac{4}{3}\pi \times \overline{1{,}347}^3 \times 19{,}26,$$

et par suite le calcul suivant :

$$\log 4 = 0{,}6021 \qquad \log 1{,}347 = 0{,}1293$$
$$\text{colog}\ 3 = \bar{1}{,}5229$$
$$\log \pi = 0{,}4971$$
$$3 \log 1{,}347 = 0{,}3879$$
$$\log 19{,}26 = 1{,}2847$$
$$\log x = 2{,}2947 \qquad x = 197^{Kgr},1.$$

3° Quel est le rayon d'une sphère en or qui pèse $97^{Kgr},84$?

Si x est le rayon cherché exprimé en décimètres, on a :

$$x = \sqrt[3]{\frac{97{,}84 \times 3}{4\pi \times 19{,}26}},$$

d'où le calcul :

$$\log 97{,}84 = 1{,}9905 \qquad \log \pi = 0{,}4971$$
$$\log 3 = 0{,}4771 \qquad \log 19{,}26 = 1{,}2847$$
$$\text{colog}\ 4 = \bar{1}{,}3979$$
$$\text{colog}\ \pi = \bar{1}{,}5029$$
$$\text{colog}\ 19{,}26 = \bar{2}{,}7153$$
$$3 \log x = 0{,}0837$$
$$\log x = 0{,}0279 \qquad x = 1^{dm},067.$$

Nous trouverons plus loin d'autres exemples.

§ 3. — Tables de Logarithmes des lignes trigonométriques des angles.

168. — Pour effectuer les calculs de trigonométrie, il est avantageux de posséder une table donnant non pas les valeurs de ces lignes, mais leurs logarithmes.

La Table III, placée à la fin du volume, contient les logarithmes des six lignes trigonométriques de tous les angles aigus de dix minutes en dix minutes, avec quatre décimales.

Les logarithmes des sécantes, cosécantes et cotangentes sont les compléments des logarithmes des cosinus, sinus et tangentes correspondants; nous les avons inscrits dans la table pour plus de commodité. De même le logarithme d'une tangente est la différence entre les logarithmes du sinus et du cosinus correspondants.

On sait comment les lignes trigonométriques d'un angle obtus se déduisent de celles de l'angle aigu qui est son supplément.

La Table III est disposée absolument comme la Table des lignes trigonométriques placée à la fin du *Cours de géométrie :* on s'en sert de la même façon en faisant bien attention que les logarithmes des lignes sinus, tangentes et $\frac{1}{\text{cosinus}}$ augmentent en même temps que l'angle aigu, tandis que les logarithmes des lignes cosinus, $\frac{1}{\text{sinus}}$ et $\frac{1}{\text{tang}}$ diminuent lorsque l'angle aigu augmente.

Exemple. — Calculer les logarithmes des lignes trigonométriques de 39°53′.

1° $\log \sin 39°50' = \bar{1},8066$ $\quad 15 \times 0,3 = 4,5$

$$+5$$

$\log \sin 37°53' = \bar{1},8071$

(15 est en unités du quatrième ordre décimal la différence entre log sin 40° et log sin 39° 50′).

$$2^\circ \quad \log \frac{1}{\sin} 39^\circ 50' = 0{,}1934 \qquad 15 \times 0{,}3 = 4{,}5$$
$$-5$$
$$\log \frac{1}{\sin} 39^\circ 53' = 0{,}1929.$$

$$3^\circ \quad \log \operatorname{tg} 39^\circ 50' = \bar{1}{,}9212 \qquad 26 \times 0{,}3 = 7{,}8$$
$$+8$$
$$\log \operatorname{tg} 39^\circ 53' = \bar{1}{,}9220.$$

$$4^\circ \quad \log \frac{1}{\operatorname{tg}} 39^\circ 50' = 0{,}0788 \qquad 26 \times 0{,}3 = 7{,}8$$
$$-8$$
$$\log \frac{1}{\operatorname{tg}} 39^\circ 53' = 0{,}0780.$$

$$5^\circ \quad \log \cos 39^\circ 50' = \bar{1}{,}8853 \qquad 10 \times 0{,}3 = 3$$
$$-3$$
$$\log \cos 39^\circ 53' = \bar{1}{,}8850.$$

$$6^\circ \quad \log \frac{1}{\cos} 39^\circ 50' = 0{,}1147 \qquad 10 \times 0{,}3 = 3$$
$$+3$$
$$\log \frac{1}{\cos} 39^\circ 53' = 0{,}1150.$$

2° Quel est l'angle x tel que $\log \sin x = \bar{1}{,}3415$?
On a :

$$\log \sin x = \bar{1}{,}3415$$
$$\log \sin 12^\circ 40' = \bar{1}{,}3410 \qquad \frac{5}{56} = 0{,}1$$
$$5$$
$$x = 12^\circ 41'.$$

3° Quel est l'angle x tel que $\log \cos x = \bar{1}{,}5728$?

On a :

$$\begin{aligned} \log\cos\ \ x &= \bar{1},5728 \\ \log\cos 68° &= \bar{1},5736 \\ &\quad -8 \\ x &= 68°\,3'. \end{aligned} \qquad \frac{8}{32} = 0,3$$

Ces exemples montrent suffisamment que l'usage de cette table est le même que celui de la Table des lignes trigonométriques.

Remarques. — 1° Lorsque les angles sont petits, inférieurs à 5°, la table ne permet plus le calcul des logarithmes des lignes sinus, $\frac{1}{\sin}$, tang, $\frac{1}{\text{tang}}$ avec précision ; leurs différences successives varient trop vite ; il en est de même pour les lignes cosinus, $\frac{1}{\cos}$, tang, $\frac{1}{\text{tang}}$ quand l'angle est supérieur à 85°.

Dans ces cas, on ne calcule plus sur les lignes mal déterminées qu'avec trois décimales, parce que, en conservant ce nombre de chiffres, les différences successives varient assez peu pour permettre l'interpolation.

Enfin, si l'angle donné x est très petit, inférieur à 1°, et si n est sa valeur en minutes, on peut appliquer les formules suivantes :

$$\log\sin x = \log n + \bar{4},4637.$$
$$\log \text{tg}\ x = \log n + \bar{4},4637.$$

Ce nombre $\bar{4},4637$ est le logarithme du sinus et de la tangente de l'angle de 1'.

Connaissant les logarithmes du sinus et de la tangente, on a facilement ceux des lignes $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{1}{\text{tang}}$.

De même, si l'angle est supérieur à 89°, on ramène la recherche des logarithmes de ses lignes trigonométriques à la même recherche relative à son complément.

2° On verra que, comme quand il s'agit des valeurs mêmes des lignes trigonométriques, un angle est d'au-

tant mieux déterminé par la connaissance du logarithme d'une de ses lignes trigonométriques que la différence tabulaire correspondante est plus grande; aussi détermine-t-on mal un angle inférieur à 35° par le logarithme de son cosinus, et un angle supérieur à 55° par le logarithme de son sinus. En général, il vaut mieux déterminer un angle par le logarithme de sa tangente.

3° Nous avons supposé plus haut qu'on ne déterminait les angles qu'à une minute près; on peut avoir dans bien des cas une plus grande approximation quand la différence tabulaire est suffisamment grande; on pourra donc dans les calculs où les données sont connues avec précision, et si les circonstances le permettent, déterminer les angles au dixième de minute près.

169. — Comme exemples, nous allons résoudre par l'emploi des logarithmes les mêmes exercices que dans le *Cours de géométrie :* on devra se reporter aux notations qui y ont été employées.

1° *Résoudre un triangle rectangle, connaissant* $a = 169^{m}$, $B = 22°37'$.

On a d'abord :

$$C = 90° - B = 67°23',$$

puis

$$b = a \sin B, \qquad c = a \cos B, \qquad S = \frac{1}{2} bc,$$

d'où le calcul

$$\begin{array}{rrr} \log a = 2{,}2279 & \log a = 2{,}2279 & \log b = 1{,}8129 \\ \log \sin B = \bar{1}{,}5850 & \log \cos B = \bar{1}{,}9652 & \log c = 2{,}1931 \\ \hline \log b = 1{,}8129 & \log c = 2{,}1931 & \operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}6990 \\ & & \hline \log S = 3{,}7050 \end{array}$$

$$b = 65^{m},0, \qquad c = 156^{m},00, \qquad S = 5070^{mq}.$$

2° *Résoudre un triangle rectangle, connaissant* $b = 65^{m}$, $B = 22°37$.

On a d'abord :

$$C = 90° - 22°37' = 67°23',$$

puis

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}, \quad S = \frac{bc}{2};$$

d'où le calcul

$$\begin{array}{lll}
\log b = 1,8129 & \log b = 1,8129 & \log b = 1,8129 \\
\log \frac{1}{\sin B} = 0,4150 & \log \frac{1}{\operatorname{tg} B} = 0,3803 & \log c = 2,1932 \\
 & & \operatorname{colog} 2 = \bar{1},6990 \\
\hline
\log a = 2,2279 & \log c = 2,1932 & \log S = 3,7051 \\
a = 169^{m},0, & c = 156^{m},0, & S = 5071^{mq}.
\end{array}$$

3° *Résoudre un triangle rectangle, connaissant* a = 169^{m}, b = 65^{m}.

On a :

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad C = 90° - B, \quad c = a \cos B, \quad S = \frac{1}{2} bc,$$

d'où le calcul

$$\begin{array}{lll}
\log b = 1,8129 & \log a = 2,2279 & \log b = 1,8129 \\
\log a = 2,2279 & \log \cos B = \bar{1},9652 & \log c = 2,1931 \\
\hline
\log \sin B = \bar{1},5850 & \log c = 2,1931 & \operatorname{colog} 2 = \bar{1},6990 \\
 & & \log S = 3,7050 \\
B = 22°37', \quad C = 67°23', & c = 156^{m},0, & S = 5070^{mq}.
\end{array}$$

4° *Résoudre un triangle rectangle, connaissant* b = 65^{m}, c = 156^{m}.

On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad C = 90° - B, \quad a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\cos B}, \quad S = \frac{1}{2} bc,$$

d'où le calcul

$$\begin{array}{lll}
\log b = 1,8129 & \log c = 2,1931 & \log b = 1,8129 \\
\log c = 2,1931 & \log \frac{1}{\cos B} = 0,0348 & \log c = 2,1931 \\
\hline
\log \operatorname{tg} B = \bar{1},6198 & & \operatorname{colog} 2 = \bar{1},6990 \\
 & \log a = 2,2279 & \log S = 3,7050 \\
B = 22°37', \quad C = 67°23', & a = 169^{m},0, & S = 5070^{mq}.
\end{array}$$

5° *Résoudre un triangle, connaissant* a $=201^{m}$, $B=38°42'$, $C=18°14'$.

On a :

$$A=180°-B-C=123°4',$$

$$b=\frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c=\frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S=\frac{1}{2} ab \sin C,$$

d'où le calcul

$\log a=2,3032$	$\log a=2,3032$	$\log a=2,3032$
$\log \sin B=\bar{1},7960$	$\log \sin C=\bar{1},4954$	$\log b=2,1759$
$\log \frac{1}{\sin A}=0,0767$	$\log \frac{1}{\sin A}=0,0767$	$\log \sin C=\bar{1},4954$
		$\text{colog } 2=\bar{1},6990$
$\log b=2,1759$	$\log c=1,8753$	$\log S=3,6735$

$$b=150^{m},0, \quad c=75^{m},04, \quad S=4716^{mq}.$$

6° *Résoudre un triangle, connaissant* b $=150^{m}$, c $=75^{m}$, $A=123°4'$.

On a :

$$\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2};$$

on emploie la formule (Exercice 8, p. 279, *Cours de géométrie*) $\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$

et l'on a ainsi B et C; puis on a :

$$a=\frac{b \sin A}{\sin B}=\frac{c \sin A}{\sin C}, \qquad S=\frac{1}{2} bc \sin A.$$

$\frac{A}{2}=61°32', \frac{B+C}{2}=28°28', b-c=75^{m}, b+c=225^{m},$

et par suite

$$\log(b-c)=1,8751 \qquad \log b=2,1761$$
$$\operatorname{colog}(b+c)=\bar{3},6478 \qquad \log\sin A=\bar{1},9233$$
$$\log\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\bar{1},7342 \qquad \log\frac{1}{\sin B}=1,2038$$
$$\log a=3,3032$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=\bar{1},2571$$
$$\frac{1}{2}(B-C)=10^\circ 15'$$

$$\log b=2,1761$$
$$\log c=1,8751$$
$$\log\sin A=\bar{1},9233$$
$$\operatorname{colog}2=\bar{1},6990$$
$$\log S=3,6735$$

B = 38° 43′, C = 18° 13′, *a* = 201ᵐ,0, S = 4716ᵐᑫ.

7° *Résoudre un triangle, connaissant* a = 201ᵐ, b = 150ᵐ, c = 75ᵐ.

On emploie les formules (Exercice 6, p. 179, *Cours de géométrie*) :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ou

$$2p=a+b+c.$$

Ici

$$p = 213^{m},\quad p - a = 12^{m},\quad p - b = 63^{m},\quad p - c = 138^{m}.$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2,3284 \\ \log (p-a) &= 1,0792 \\ \log (p-b) &= 1,7993 \\ \log (p-c) &= 2,1399 \\ \hline 2 \log S &= 7,3468 \\ \log S &= 3,6734 \\ S &= 4714^{mq} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (p-b) &= 1,7993 \\ \log (p-c) &= 2,1399 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{3},6716 \\ \operatorname{colog} (p-a) &= \bar{2},9208 \\ \hline 2 \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= 0,5316 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= 0,2658 \\ \tfrac{1}{2} A &= 61^{\circ}\,32' \\ A &= 123^{\circ}\,4' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (p-c) &= 2,1399 \\ \log (p-a) &= 1,0792 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{3},6716 \\ \operatorname{colog} (p-b) &= \bar{2},2007 \\ \hline 2 \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \bar{1},0914 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \bar{1},5457 \\ \tfrac{1}{2} B &= 19^{\circ}\,22' \\ B &= 38^{\circ}\,44' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (p-a) &= 1,0792 \\ \log (p-b) &= 1,7993 \\ \operatorname{colog} p &= \bar{3},6716 \\ \operatorname{colog} (p-c) &= \bar{3},8601 \\ \hline 2 \log \tfrac{1}{2} C &= \bar{2},4102 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \bar{1},2051 \\ \tfrac{1}{2} C &= 9^{\circ}\,6',7 \\ C &= 18^{\circ}\,13'. \end{aligned}$$

Ces mêmes formules serviront à résoudre rapidement les problèmes sur le terrain.

Exercices

1. — Calculer

$$x = \sqrt[3]{\frac{0,857 \times 3,931}{0,428\sqrt{\pi}}}.$$

2. — Calculer

$$x = \frac{\sqrt[7]{(345,829)^{3}} \times \sqrt{25,36}}{(0,213)^{4} \times \sqrt[5]{0,317}}.$$

3. — Calculer le volume d'un cône dont la hauteur est $1^{m},753$ et le rayon de base $36^{cm},47$.

4. — Quel est l'angle au sommet de ce même cône?

5. — Quel est le volume d'une sphère dont la surface est $57^{mq},497$?

6. — Quelle est la surface d'une sphère dont le volume es de 2 437 litres?

7. — Quel est le volume d'une sphère dont un grand cercle a une circonférence de $347^{m},68$?

8. — Quelle est la surface de cette même sphère?

9. — Quel est le poids d'une sphère pleine en cuivre de densité 8,427, sachant que sa surface est de $28^{cmq},35$?

10. — Quel est le volume d'un tronc de cône de hauteur $5^{m},762$, sachant que les rayons des bases sont $3^{m},456$ et $1^{m},797$?

Résoudre un triangle rectangle avec les données suivantes :

11. —	$a = 37^{m},50.$	$B = 38^{\circ}4'.$
12. —	$b = 64^{m},50,$	$B = 8^{\circ}52'.$
13. —	$a = 104^{m},5,$	$b = 37^{m},48.$
14. —	$a = 56^{m},84,$	$C = 46^{\circ}55'.$
15. —	$b = 36^{m},84,$	$C = 49^{\circ}3'.$
16. —	$a = 105^{m},4,$	$c = 98^{m},05.$
17. —	$a = 45^{m},72,$	$B = 21^{\circ}54'.$
18. —	$c = 8^{m},94,$	$B = 11^{\circ}54'.$
19. —	$b = 82^{m},43,$	$c = 57^{m},91.$

Résoudre un triangle avec les données suivantes :

20. —	$a = 10^{m},48,$	$B = 35^{\circ}4',$	$C = 104^{\circ}48'.$
21. —	$a = 54^{m},55,$	$A = 33^{\circ}52',$	$B = 52^{\circ}6'.$
22. —	$a = 45^{m},94,$	$A = 45^{\circ}47',$	$B = 44^{\circ}36'.$
23. —	$b = 10^{m},97,$	$c = 54^{m},09,$	$A = 24^{\circ}18'.$
24. —	$b = 45^{m},37,$	$c = 18^{m},26,$	$A = 150^{\circ}48'.$
25. —	$a = 70^{m},45,$	$b = 85^{m},70,$	$c = 104^{m},91.$
26. —	$a = 22^{m},35,$	$b = 29^{m},80,$	$c = 37^{m},25.$

27. — Dans un triangle on donne

$$a = 70^{m},45, \quad b = 85^{m},70, \quad c = 104^{m},91.$$

Calculer les hauteurs.

28. — Dans le même triangle, calculer les rayons des cercles inscrit, exinscrits et circonscrit.

29. — Dans le même triangle, calculer les bissectrices intérieures.

30. — Dans le même triangle, calculer les bissectrices extérieures.

CHAPITRE III

RÈGLE A CALCUL

170. — La *règle à calcul* est un instrument qui sert à faire sans le secours de la plume les multiplications, divisions, extractions de racines carrées et cubiques et les combinaisons de ces opérations, avec une approximation le plus souvent suffisante dans la pratique.

La règle à calcul ordinaire est en bois ; elle se compose d'une partie fixe ou *règle* proprement dite, et d'une partie mobile, appelée *réglette* ou *coulisse*, qui glisse à frottement doux dans les rainures pratiquées dans la règle.

La règle porte à sa face inférieure un tableau de nombres usuels ; sur ses côtés elle est divisée en centimètres et millimètres, et peut, par conséquent, servir à mesurer les longueurs ; sur le côté supérieur, qui forme biseau, elle est divisée en 25 centimètres ; sur le côté inférieur, elle est divisée en 26 centimètres, longueur totale de la règle, et cette graduation se poursuit jusqu'à 52 centimètres, sur la partie de la règle qui apparaît quand on enlève la coulisse.

La face supérieure de la règle, qui seule nous intéresse, porte deux divisions ou échelles, l'une supérieure, l'autre inférieure.

L'échelle supérieure, ou échelle des nombres, se compose de deux parties identiques, placées l'une au bout de l'autre. Occupons-nous de la première à gauche. Les traits principaux portent les numéros 1, 2, 3, ... 9, 1 ; nous lirons 10 à la place de ce dernier. Les longueurs des intervalles 1 — 2, 1 — 3, 1 — 4, 1 — 5, ... 1 — 9, 1 — 10 sont proportionnelles aux logarithmes des nombres 2, 3, 4, 5,... 9, 10 ; de sorte que, si nous prenons pour unité de longueur la distance des deux premiers traits de l'échelle supérieure numérotés 1, les longueurs des intervalles

1 — 2, 1 — 3, 1 — 4,... sont précisément les logarithmes des nombres 2, 3, 4,......, puisque le logarithme de 10 est 1.

L'intervalle 1 — 2 est divisé en 50 parties; et sur les traits successifs on suppose inscrits les nombres 1,02, 1,04, 1,06, ... de deux centièmes en deux centièmes. La lecture est facilitée par les longueurs inégales des traits.

Les intervalles 2 — 3, 3 — 4 et 4 — 5 sont divisés en 20 parties, et les traits correspondent aux nombres 2,05, 2,10, 2,15, ... jusqu'à 4,90, 4,95, 5, de cinq centièmes en cinq centièmes.

Enfin, les intervalles 5—6, 6—7, 7—8, 8—9, 9—10 sont divisés en 10 parties, et les traits correspondent aux nombres 5,1, 5,2, ... jusqu'à 9,8, 9,9, 10, de un dixième en un dixième.

En subdivisant à vue par la pensée les intervalles entre deux traits successifs, on peut lire un nombre quelconque compris entre 1 et 10, c'est-à-dire déterminer la place qui lui correspond.

Comme précédemment, les divisions sont telles que, si l'une d'elles correspond au nombre *a*, *la longueur de l'intervalle* 1 — a *soit précisément le logarithme de* a.

La seconde partie de l'échelle des nombres est identique à la première. Les traits principaux portent les numéros 1, 2, 3 ... 9, 1 ; nous les lirons comme s'ils étaient inscrits 10, 20, 30, ... 90, 100; et par suite quand nous parlerons du trait 1 de l'échelle supérieure, il faudra entendre celui qui correspond au premier 1 à gauche.

L'intervalle 10 — 20 est partagé en 50 parties correspondant aux nombres 10,2, 10,4, 10,6, ... ; les intervalles 20 — 30, 30 — 40, 40 — 50 sont partagés chacun en 20 parties égales correspondant aux nombres 20,5, 21, 21,5, ... 49, 49,5, 50; les intervalles 50 — 60, 60 — 70, 70 — 80, 80 — 90, 90 — 100 sont partagés chacun en 10 parties correspondant aux nombres 51, 52,... 98, 99, 100.

Puisque les deux moitiés de l'échelle supérieure sont identiques, il est clair, d'après les propriétés des logarithmes, que *la longueur de l'intervalle* 1 — a, a *étant un*

nombre compris entre 10 *et* 100, *est toujours précisément le logarithme de* a ; et par suite plus généralement, *a* et *b* étant deux nombres compris entre 1 et 100, *la longueur de l'intervalle* a — b *est précisément la différence log* b — *log* a.

L'échelle inférieure de la face supérieure de la règle ou *échelle des racines carrées* a la même longueur que l'échelle supérieure ; elle porte les traits principaux 1, 2, 3,... 9, 1 ; nous lirons 10 à la place de ce dernier.

L'intervalle 1 — 2 est partagé en 100 parties correspondant aux nombres 1,01, 1,02, ... 1,99, 2 ; la lecture est facilitée par l'inscription sur la règle des nombres 1,1, 1,2,... 1,9.

Les intervalles 2 — 3 et 3 — 4 sont partagés chacun en 50 parties correspondant aux nombres 2,02, 2,04, ... 3,96, 3,98, 4.

Les intervalles 4 — 5, 5 — 6, 6 — 7, 7 — 8, 8 — 9, 9 — 10 sont partagés chacun en 20 parties égales correspondant aux nombres 4,05, 4,1, 4,15, ... 9, 9, 9, 95, 10.

Puisque l'échelle inférieure est de longueur égale à la longueur totale de l'échelle supérieure, *la distance* 1 — a *comptée sur l'échelle inférieure*, a *étant un nombre compris entre* 1 et 10, *est le double du logarithme de* a, en conservant toujours, bien entendu, la même unité de longueur ; plus généralement, si *a* et *b* sont compris entre 1 et 10, *la longueur de l'intervalle* a — b *est égale à* 2 *log* b — 2 *log* a.

171. — Considérons maintenant la réglette ; elle porte à sa face supérieure deux échelles identiques à l'échelle supérieure de la règle et que nous lirons de la même façon.

La face inférieure de la réglette porte trois échelles. L'échelle supérieure, intitulée S, est divisée en degrés ; les nombres inscrits permettent de lire les divisions qui correspondent à 1°, 2°, 3°, 4°, ... 9°, 10°, 15°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°.

L'intervalle à gauche de 1° est divisé en parties dont chacune vaut 5′, de sorte que le premier trait à gauche,

après l'origine de la graduation, correspond à 35'.

Les intervalles 2° — 3°, 3° — 4°, 4° — 5° sont de même partagés en divisions dont chacune vaut 5'.

Les intervalles 5° — 6°, ... 9° — 10° sont partagés en divisions dont chacune vaut 10'; les intervalles 10°—15° et 15° — 20° sont partagés en divisions dont chacune vaut 20'; l'intervalle 20° — 30° est partagé en divisions de 30'; les intervalles 30° — 40°, 40° — 50°, 50° — 60° sont partagés en divisions dont chacune vaut 1°; l'intervalle 60° — 70° est partagé en divisions de 2°; enfin, trois traits après 70° permettent de lire 75°, 80° et 90°. Par la pensée, on peut fixer sur la règle, à vue, la place qu'occuperait un angle quelconque *a* inférieur à 90°.

Cette échelle a même longueur que les échelles de la règle; elle est construite de telle façon que, *a* et *b* étant deux angles aigus, *la longueur de l'intervalle* a — b *soit précisément la différence log sin* b — *log sin* a, l'unité de longueur définie plus haut étant toujours conservée; en particulier, *l'intervalle* a — 90° *a pour longueur — log sin* a, puisque sin 90° = 1 ; cette échelle est dite *échelle des sinus.*

L'échelle du milieu de la face inférieure de la réglette, intitulée T, est l'*échelle des tangentes.* Elle est divisée comme l'échelle des sinus, mais la graduation ne va que jusqu'à 45°, et les intervalles 30° — 40°, 40° — 45° sont divisés en demi-degrés : elle a même longueur que l'échelle des sinus, et, si *a* et *b* sont deux angles inférieurs à 45°, la *longueur de l'intervalle* a — b *est précisément la différence log* tgb — *log* tga ; en particulier, *l'intervalle* a — 45° *a pour longueur — log* tga, *puisque* tg 45° = 1.

Enfin, l'échelle inférieure de la face inférieure de la coulisse, ou *échelle des logarithmes*, a encore même longueur que les précédentes; elle est divisée de droite à gauche en 500 parties *égales;* les traits numérotés 1, 2, 3,... correspondent aux nombres 0,1, 0,2, 0,3, ... et par suite les autres traits aux nombres 0,000, 0,002, 0,004, 0,006... 0,996, 0,998, 1,000.

Enfin, nous remarquerons que la réglette a une longueur

totale égale à celle de la règle, et que si on l'engageait dans la rainure en la retournant, et maintenant le bouton à droite de façon à faire coïncider ses extrémités avec celles de la règle, ce que rend impossible la présence du bouton, les extrémités des échelles des sinus, tangentes et logarithmes viendraient aussi en coïncidence avec les extrémités des échelles des nombres et des racines carrées. De plus, la différence des blancs qui restent à gauche du 1 de la règle et à gauche du 1 de la coulisse est égale au blanc qui reste à droite du 100 de la règle.

172. — La réglette peut être engagée dans la rainure de quatre façons différentes, suivant qu'elle présente à l'œil sa face supérieure ou inférieure et que le bouton est à droite ou à gauche : mais on n'emploie que les deux positions dans lesquelles se présente la face supérieure. Nous allons examiner successivement le parti que l'on peut tirer de la règle à calcul suivant que la réglette est engagée dans l'une ou l'autre de ces deux positions.

Première position. — *La réglette présente sa face supérieure, le bouton est à droite.* C'est la position normale de la réglette, celle que l'on emploie le plus souvent.

En tirant plus ou moins la coulisse, on fait varier sa position par rapport à la règle. Soit une position quelconque de la coulisse, a et a' deux nombres de l'échelle des nombres, b et b' les nombres correspondants de la coulisse :

l'intervalle $a - a'$ est égal à $\log a' - \log a = \log \frac{a'}{a}$;

l'intervalle $b - b'$ est égal à $\log b' - \log b = \log \frac{b'}{b}$;

mais ces deux intervalles sont égaux ; donc on a :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Ceci posé, soit à calculer un nombre x défini par l'égalité

$$x = \frac{ab'}{b} ;$$

on placera b de la coulisse sous a de l'échelle des nombres; on lira x dans cette échelle au-dessus de b' sur la coulisse.

Exemple. — Soit :

$$x = \frac{3,5 \times 12,4}{7,9};$$

on trouve $x = 5,50$; le résultat exact est 5,4936...

Mais il est clair que l'opération décrite n'est pas toujours possible, car tous les nombres ne sont pas inscrits sur les échelles; quand elle ne l'est pas, on peut la rendre possible de bien des façons; en voici une uniforme et toujours applicable. Par des déplacements convenables de virgules, on peut toujours écrire :

$$x = \frac{a_1 b'_1}{b_1} \times 10^n \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a_1 b'_1}{b_1} \times \frac{1}{10^n},$$

b_1, b'_1 étant des nombres compris entre 1 et 10 qui se déduisent immédiatement de b, b', et a_1 étant un nombre compris entre 1 et 100 se déduisant de a, de façon que le rapport $\frac{a_1}{b_1}$ soit compris entre 1 et 10; n est un exposant qui se détermine à vue. Alors il ne reste plus qu'à déterminer

$$x_1 = \frac{a_1 b'_1}{b_1};$$

en amenant b_1 sous a_1, le nombre b'_1 de la réglette ne sortira jamais de la règle; d'ailleurs la réglette sera toujours sortie vers la droite.

Exemple. — Soit :

$$x = \frac{524 \times 0,0675}{34,5}.$$

On écrit :

$$x = \frac{5,24 \times 6,75}{3,45} \times \frac{1}{10}.$$

Or

$$\frac{5,24 \times 6,75}{3,45} = 10,25; \text{ donc } x = 1,025.$$

De même si l'on a :

$$x = \frac{235 \times 345}{612},$$

on trouve :

$$x = \frac{23{,}5 \times 3{,}45}{6{,}12} \times 10 = 132.$$

Il est clair que l'emploi de la formule

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

fournit bien d'autres façons pour calculer une quatrième proportionnelle.

Dans les cas où le rapport $\frac{a}{b}$ est constant, on voit que, b' variant, on obtient le résultat x sans changer la position de la règle.

Exemple. — Soit à majorer de 15 °/° les prix d'objets revenant le premier à 3^{fr},75, le second à 4^{fr},85, le troisième à 13^{fr},45, etc.

Il faut multiplier 3,75, 4,85, 13,45, ... par $\frac{115}{100}$ ou $\frac{1{,}15}{1}$; en mettant 1 de la coulisse sous 1,15 de la règle, on trouve immédiatement les prix : 4^{fr},31, 5^{fr},57, 15^{fr},46, ...

Les cas particuliers de l'opération générale ci-dessus sont la division et la multiplication de deux nombres. Si $b = 1$, on a $x = ab'$; donc a et b' étant ramenés à être compris entre 1 et 10, on amènera 1 de la coulisse sous a, et on lira x au-dessus de b'.

Exemple :

$$x = 34{,}5 \times 0{,}525 = 18{,}1.$$

Si a est fixe, et si b' varie, on n'a qu'à lire les résultats des diverses multiplications sans déplacer la règle.

Si $b' = 1$, on a :

$$x = \frac{a}{b};$$

donc b étant compris entre 1 et 10, ainsi que le rapport $\frac{a}{b}$, on placera b sous a, et on lira x au-dessus de 1.

Exemple :

$$\frac{2,375}{47,25}=\frac{23,75}{4,725}\times\frac{1}{100}=0,0503.$$

La règle à appliquer est toujours la même.

En faisant $a=1$, on aurait :

$$x=\frac{b'}{b},$$

et l'on a un nouveau moyen de faire la division ; si b et b' sont compris entre 1 et 10, on amène b sous 10 ; on lit le nombre au-dessus de b', et on divise par 10 ; dans le cas général, on ramène b et b' à être compris entre 1 et 10.

On pourrait trouver encore bien d'autres moyens de faire une division avec la règle à calcul ; mais tous les moyens possibles dérivent de l'unique formule

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}.$$

173. — Supposons maintenant que c et c' soient deux nombres de l'échelle des racines carrées, b et b' les nombres correspondants de la coulisse :

l'intervalle $c-c'$ est égal à $2\log c'-2\log c=\log\frac{c'^2}{c^2}$;

l'intervalle $b-b'$ est égal à $\log b'-\log b=\log\frac{b'}{b}$;

mais ces deux intervalles sont égaux ; on a donc :

$$\frac{c'^2}{c^2}=\frac{b'}{b}.$$

Ceci posé, soit à calculer un nombre x défini par l'égalité

$$x=\frac{bc'^2}{c^2}.$$

On placera c sous b, et on lira x sur la coulisse au-dessus de c', pris dans l'échelle des racines.

Exemple. — Soit :

$$x = \frac{3,5 \times \overline{8,5}^2}{\overline{7,4}^2};$$

on trouve $x = 4,62$.

Quand l'opération ne sera pas possible, on essayera de la rendre possible par des déplacements de virgules convenables ; on s'arrangera de façon que c et c' soient compris entre 1 et 10, et b compris entre 1 et 100 : on s'assure que l'opération devient alors possible si l'on a :

$$\frac{100c^2}{c'^2} > b > \frac{c^2}{c'^2};$$

sinon elle ne l'est pas.

Exemple. — Soit :

$$x = \frac{104 \times \overline{0,36}^2}{\overline{71}^2}.$$

On a :

$$x = \frac{10,4 \times \overline{3,6}^2}{\overline{7,1}^2} \times \frac{1}{1000} = 0,00267.$$

Examinons maintenant les cas particuliers.

Si $b = c = 1$, on a $\qquad x = c'^2;$

donc pour former le carré de c' on met 1 de l'échelle des racines carrées sous 1 de la coulisse, et on lit le résultat sur la coulisse au-dessus de c'.

Si $c = 1$, on a $\qquad x = bc'^2;$

si $c' = 1$, on a $\qquad x = \frac{b}{c^2};$

si $b = 1$, on a $\qquad x = \frac{c'^2}{c^2};$

si $b = c'$, on a $\qquad x = \frac{b^3}{c^2},$

et en particulier pour $c = 1$, on a

$$x = b^3;$$

donc, pour former le cube de b, on met 1 de l'échelle des racines carrées sous b de la coulisse, et on lit le résultat sur la coulisse au-dessus de b; ceci ne peut s'appliquer que pour $b^3 < 100$.

L'égalité fondamentale

$$\frac{c'^2}{c^2} = \frac{b'}{b}$$

donne encore le moyen de calculer un nombre x défini par

$$x = \sqrt{\frac{c^2 b'}{b}} = c\sqrt{\frac{b'}{b}}.$$

On place b au-dessus de c, et on lit le résultat sur l'échelle des racines au-dessous de b'.

Exemple :

$$3\sqrt{\frac{4}{5}} = 2{,}68.$$

Si l'opération n'est pas possible, on la rendra possible comme plus haut, au moins dans certains cas.

Voici quelques cas particuliers :

Si $b = c = 1$, on a $x = \sqrt{b'}$;
si $b = 1$, $b' = c$, on a $x = \sqrt{b'^3}$;
si $b = c$, on a $x = \sqrt{cb'}$;

ainsi :

$$\sqrt{535 \times 0{,}104} = \sqrt{5{,}35 \times 10{,}4} = 7{,}46.$$

174. — Soient a et b deux nombres correspondants de l'échelle des nombres et de la coulisse; b' et c' deux nombres correspondants de la coulisse et de l'échelle des racines carrées.

On a la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c'^2}{b'},$$

qui permettra de résoudre de nouvelles questions analogues aux précédentes.

En particulier on a :

$$a = \frac{bc'^2}{b'},$$

et pour $b' = 1$, $b = c'$,

$$a = b^3 ;$$

on a donc le cube de b en mettant 1 de la coulisse sur b de l'échelle des racines, et lisant le résultat dans l'échelle des nombres au-dessus de b de la coulisse : ceci n'est possible que si b, qui est un nombre compris entre 1 et 10, a son cube inférieur à 100; mais on a aussi :

$$a = 10 \times \frac{b^3}{10} ;$$

donc, si b^3 est supérieur à 100, on mettra 10 de la coulisse au-dessus de b, et on continuera comme plus haut; le résultat sera ensuite multiplié par 10; le même procédé peut s'appliquer si l'on a $b^3 > 10$.

175. — La coulisse étant tirée dans une position quelconque vers la droite, retournons la règle et lisons l'angle A de l'échelle des sinus, marqué par l'affleurement de la règle sur la coulisse. Alors, d'après ce qui a été dit sur la construction de la règle, le nombre de la coulisse qui correspond à la division 100 de l'échelle des nombres sera évidemment 100 sin A; d'où le moyen de trouver sin A.

Si a et b sont alors deux nombres correspondants de l'échelle des nombres et de la coulisse, b' et c' deux nombres correspondants de la coulisse et de l'échelle des racines, on aura encore d'après les nos **172** et **174** :

$$\frac{100}{100 \sin A} = \frac{a}{b} = \frac{c'^2}{b'},$$

ou

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{a}{b} = \frac{c'^2}{b'},$$

d'où le moyen de trouver $\frac{b}{\sin A}$, etc.

On raisonnera de même en se servant de l'échelle des tangentes; la proportion

$$\frac{1}{\text{tg A}} = \frac{a}{b}$$

donnera immédiatement cotg A en faisant $b=1$. Par suite, pour trouver la tangente d'un angle supérieur à 45°, il n'y aura pas de difficulté; on lira la cotangente du complément de cet angle au-dessus du 1 de la coulisse : ainsi

$$\text{tg } 60° = \text{cotg } 30° = 1{,}73.$$

Enfin, en lisant de même le nombre l de l'échelle des logarithmes marqué par l'affleurement de la règle, on voit que c'est le logarithme du nombre de l'échelle des racines placé au-dessous du 1 de la coulisse, ce qui donne le moyen d'avoir le logarithme d'un nombre quelconque.

176. — Deuxième position. — *La réglette présente sa face supérieure, le bouton est à gauche.*

Soient toujours (il faut avoir soin de lire sur la coulisse à l'envers, de droite à gauche) a, b, c; a', b', c' des groupes de nombres correspondants sur l'échelle des nombres, la coulisse et l'échelle des racines. Ici on a évidemment :

$$ab = a'b',$$

ce qui donne de nouveaux moyens de résoudre les questions du n° **172**, en particulier de calculer le produit ou le quotient de deux nombres.

On a aussi :

$$bc^2 = b'c'^2,$$

ce qui donne de nouveaux moyens pour résoudre les questions du n° **173**. En particulier pour $b'=c'$, $c=1$, on a :

$$b = b'^3;$$

donc, pour former le cube de b', on place b' sur la coulisse en coïncidence avec b' sur l'échelle des racines, et on lit le résultat sur la coulisse au-dessus de 1. Ceci ne peut s'appliquer que pour $b'^3 < 100$.

Enfin on a encore :

$$ab = b'c'^2,$$

formule qui correspond à celle du n° 174.

Pour $b' = c'$, $b = 1$, on a :

$$a = b'^3;$$

donc, pour former le cube de b', on place la coulisse comme précédemment, et on lit le résultat sur l'échelle des nombres au-dessus du 1 de la coulisse. Ceci ne s'applique que pour $b'^3 < 100$. Pour $b'^3 > 100$, on écrit :

$$a \times 10 = 10 \times b'^3,$$

et par suite on lit le résultat au-dessus du 10 de la coulisse et on multiplie par 10.

Inversement par suite, pour extraire la racine cubique d'un nombre compris entre 1 et 1 000 : 1° s'il est inférieur à 100, on le place au-dessus du 1 de la coulisse, et on cherche dans l'échelle des racines le nombre qui est égal à son correspondant de la coulisse; 2° s'il est supérieur à 100, on le place au-dessus du 10 de la coulisse, après l'avoir divisé par 10, et on continue de même.

Exemples :

$$\sqrt[3]{0{,}000068925} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{68{,}925} = 0{,}041,$$

$$\sqrt[3]{0{,}59} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{590} = 0{,}839.$$

Remarque. — En général, si l'on doit se servir d'une règle à calcul, c'est pour faire un grand nombre de calculs toujours pareils; alors il faudra commencer par choisir la méthode qui s'applique le mieux aux calculs à effectuer, en se guidant sur ce que nous avons dit : une fois la méthode choisie, on l'appliquera uniformément, sans essayer de nouvelles combinaisons : de cette façon on arrivera à calculer machinalement, et la règle à calcul sera un instrument utile.

Mais se servir de la règle à calcul dans des cas isolés est

une perte de temps manifeste : il faut d'abord retrouver la méthode, ensuite l'appliquer correctement, et, comme la précision sur laquelle on peut compter ne dépasse pas trois chiffres exacts à partir du premier chiffre significatif, un calcul direct est plus vite fait.

CHAPITRE IV

INTÉRÊTS COMPOSÉS. — ANNUITÉS

§ 1er. — Intérêts composés.

177. — Un capital a est dit placé à *intérêts composés*, quand au bout de chaque période de temps de durée convenue, ordinairement une année, l'intérêt du capital s'ajoute à ce capital pour devenir lui-même productif d'intérêts.

Si r est le taux de l'intérêt, c'est-à-dire l'intérêt de 1 franc pendant une période de temps, la valeur acquise du capital au bout d'une période est $a_1 = a(1+r)$; la valeur acquise au bout de la seconde période est $a_2 = a_1(1+r) = a(1+r)^2$; et par suite la valeur acquise A par le capital a au bout de n périodes est $a(1+r)^n$.

Les problèmes sur les intérêts composés sont tous résolus par la formule

$$A = a(1+r)^n.$$

Si le capital reste placé après la n^{me} période pendant une fraction de période marquée par le nombre t plus petit que 1, sa valeur devient $A(1+rt)$ ou

$$A' = a(1+r)^n(1+rt).$$

178. — Les problèmes d'intérêts composés se résolvent ordinairement par logarithmes à l'aide de la formule

$$\log A = \log a + n \log(1+r),$$

ou de la formule

$$\log A' = \log a + n \log (1+r) + \log (1+rt),$$

où n est entier, et t un nombre inférieur à 1.

Comme le logarithme de $1+r$ figure dans ces formules multiplié par un nombre n qui peut être grand, il est bon de connaître le logarithme de $1+r$ avec plus de chiffres que l'on ne doit en garder, afin d'éviter toute erreur : aussi trouvera-t-on dans la Table IV de la fin du volume les valeurs de $\log (1+r)$ avec six décimales, pour les diverses valeurs de r depuis 0 jusqu'à 0,08 de 25 dix-millièmes en 25 dix-millièmes.

Nous allons montrer sur des exemples comment se résolvent les divers problèmes d'intérêts composés que l'on rencontre.

Problème I

Quelle est la valeur acquise au bout de 25 ans par un capital de 1200 francs placé à 3 % l'an, les intérêts étant capitalisés à la fin de chaque année?

Ici $\quad a = 1200, \quad n = 25, \quad 1+r = 1{,}03;$

par suite

$$\log A = \log 1200 + 25 \log 1{,}03,$$

d'où le calcul

$$\begin{aligned} \log 1{,}03 &= 0{,}012837 \\ \log (1+r)^n &= 0{,}3209 \\ \log a &= 3{,}0792 \\ \hline \log A &= 3{,}4001 \qquad A = 2512^{fr}. \end{aligned}$$

Problème II

Quelle somme faut-il placer à intérêts composés, au taux de 3 1/2 % l'an, pour retirer 10000 francs au bout de 20 ans et 1 mois, les intérêts étant capitalisés tous les six mois?

Ici

$$A' = 10000, \qquad x = 40, \qquad t = \frac{1}{6}, \qquad r = 0{,}0175;$$

par suite

$$\log a = \log A' - 40 \log 1{,}0175 - \log 1{,}0029$$

$$\log 1{,}0175 = 0{,}007534,$$
$$40 \log 1{,}0175 = 0{,}3014;$$
$$\log 1{,}0029 = 0{,}0012,$$

d'où

$$\begin{aligned} \log A' &= 4{,}0000 \\ \text{colog}\,(1+r)^n &= \bar{1}{,}6986 \\ \text{colog}\,(1+rt) &= \bar{1}{,}9988 \\ \hline \log a &= 3{,}6974 \qquad a = 4982^{\text{fr}}. \end{aligned}$$

PROBLÈME III

Pendant combien de temps faut-il placer à intérêts composés au taux de 5 °/₀ l'an un capital de 5000 francs pour qu'il acquière la valeur 9000 fr., les intérêts étant capitalisés tous les ans?

On a :

$$n = \frac{\log A' - \log a}{\log (1+r)} - \frac{\log (1+rt)}{\log (1+r)}.$$

Comme on a $1 + rt < 1 + r$, on voit que n est la partie entière du quotient $\frac{\log A' - \log a}{\log (1+r)}$. Ici on a :

$$A' = 9000 \qquad\qquad 1 + r = 1{,}05,$$
$$a = 5000$$
$$\log A' = 3{,}9542 \quad \log (1+r) = 0{,}0212;$$
$$\log a = 3{,}6990$$
$$\log A' - \log a = 0{,}2552.$$

Par suite on trouve $n = 12$.

Ensuite, on a :

$$\log (1+rt) = \log A' - \log a - n \log (1+r),$$

et comme $\log (1+r) = 0{,}021189,$

$$n \log (1+r) = 0{,}2543,$$

il vient $\log (1+rt) = 0{,}0009 \qquad 1 + rt = 1{,}002,$

d'où $$t = \frac{1}{25} = 14^{\text{j}}\ldots$$

Le temps est 12 ans 14^{j}...

Problème IV

Trouver le taux de l'intérêt, sachant que en 20 ans une somme de 1000 francs est devenue 3650 francs, les intérêts étant capitalisés tous les ans?

On a :

$$\log(1+r)=\frac{\log A-\log a}{n}.$$

Ici

$$\begin{aligned}\log A &= 3{,}5623\\ \log a &= 3{,}0000\\ \log A - a &= 0{,}5623\end{aligned}\qquad n=20\qquad \begin{aligned}\log(1+r)&=0{,}0281.\\ 1+r&=1{,}067.\end{aligned}$$

Le taux est 6,7 °/₀.

Problème V

Trouver le taux de l'intérêt, sachant que en 20 ans et 4 mois une somme de 1000 francs est devenue 3650 francs, les intérêts étant capitalisés tous les ans?

Ici, on a :

$$\log(1+r)=\frac{\log A'-\log a}{n}-\frac{\log(1+rt)}{n}.$$

Le second terme du second membre est petit; si nous n'en tenons pas compte, nous trouvons la valeur approchée de $1+r$ comme plus haut, 1,067; alors, puisque $t=\frac{1}{3}$, on a la valeur approchée de $1+rt$, 1,022, d'où $\log(1+rt)=0{,}0094$, $\frac{\log 1+rt}{n}=0{,}0005$, et par suite la nouvelle valeur approchée de $\log(1+r)$, 0,0276, d'où $1+r=1{,}066$; donc le taux cherché est 6,6 °/₀. Le calcul n'a évidemment pas besoin d'être recommencé de nouveau.

Remarque. — Les formules de la théorie des intérêts

composés s'appliquent encore à tout problème analogue, tel que celui-ci par exemple :

La population d'un pays s'accroît de $\frac{1}{10}$ *de sa valeur tous les* 5 *ans; quelle sera cette population dans* 35 *ans?*

§ 2. — Annuités.

179. — Une *annuité* est une somme fixe, payée soit au commencement de chaque période de temps, pour amasser un capital; soit à la fin de chaque période pour amortir une dette.

Problème I

Au commencement de chaque période, on verse l'annuité a**; quel est le capital A formé au moment du** n^{me} **versement, l'intérêt de 1 franc pour une période étant** r**, les intérêts étant capitalisés à la fin de chaque période?**

Le capital A est la somme des valeurs acquises par les diverses annuités au commencement de la n^{me} période; la première acquiert ainsi la valeur $a(1+r)^{n-1}$, la seconde acquiert la valeur $a(1+r)^{n-2}$,... la dernière qui vient d'être versée a la valeur a. Donc

$$\begin{aligned} A &= a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a \\ &= a[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-2} \\ &\qquad + (1+r)^{n-1}]; \end{aligned}$$

la quantité entre crochets est la somme des n termes d'une progression géométrique de raison $1+r$ et de premier terme 1; donc cette somme est égale à $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$, et par suite on a la formule

$$A = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Applications. — 1° On donne $a = 1000^{fr}$, $n = 20$, $r = 0{,}05$. Calculer A.

On a :

$$\log(1+r) = 0{,}021189$$
$$\log(1+r)^n = 0{,}4238 \qquad (1+r)^n = 2{,}654$$
$$(1+r)^n - 1 = 1{,}654,$$

et par suite

$$A = \frac{1000 \times 1{,}654}{0{,}05} = 33080^{\text{fr}}.$$

2° On donne $A = 20000$, $n = 100$, $r = 0{,}05$; calculer a.

On a :

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1};$$

ici $\log(1+r) = 0{,}021189$
$$\log(1+r)^n = 2{,}1189 \qquad (1+r)^n = 131{,}5,$$

et par suite

$$a = \frac{1000}{130{,}5} = 7^{\text{fr}},66.$$

3° On donne $A = 20000$, $a = 100$, $r = 0{,}05$; calculer n.

On a :

$$(1+r)^n = \frac{Ar}{a} + 1,$$

d'où

$$n = \frac{\log\left(\frac{Ar}{a} + 1\right)}{\log(1+r)};$$

si ce quotient n'est pas entier, mais compris entre deux entiers consécutifs n' et $n'+1$, cela veut dire que n' annuités égales à a forment un capital inférieur à A, mais que $n'+1$ annuités égales à a forment un capital supérieur à A.

Ici $\frac{Ar}{a} + 1 = 11;$
$$\log 11 = 1{,}0414;$$
$$\log(1+r) = 0{,}0212;$$

on trouve $n' = 49.$

4° On donne $A=20000$, $a=100$, $n=50$; calculer r.

On a :

$$\frac{A}{a}=\frac{(1+r)^n-1}{r};$$

on remarque que $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ augmente évidemment en même temps que r; alors on essayera pour r diverses valeurs, et on arrivera à comprendre r entre deux valeurs aussi rapprochées l'une de l'autre qu'on voudra.

Ici on a $\frac{A}{a}=200$. Essayons $r=0,05$. On trouve :

$$\frac{(1+r)^n-1}{r}=209,4;$$

donc cette valeur de r est trop forte.

Essayons $r=0,045$; on a :

$$\log 1,045=0,019116$$

et par suite

$$\frac{(1+r)^n-1}{r}=178;$$

donc cette valeur de r est trop faible.

Essayons $r=0,0475$; on a :

$$\log 1,0475=0,020154,$$

et par suite

$$\frac{(1+r)^n-1}{r}=193;$$

cette valeur est encore trop faible.

Donc le taux est compris entre 0,0475 et 0,05 : en continuant de la même façon, on le trouverait plus exactement.

Problème II

180. — On emprunte une somme A; on veut éteindre cette dette en payant l'annuité *a* à la fin de chaque période, la première annuité étant payée à la fin de

la première période comptée à partir de la date de l'emprunt; on paye n annuités; l'intérêt de 1 franc pour une période est r, et les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période. Quelle est la relation entre A, a, r, et n?

Au bout de n périodes, la somme empruntée A vaut $A(1+r)^n$; d'ailleurs à ce même moment le capital formé par les n annuités est, d'après le numéro précédent, $a\frac{(1+r)^n-1}{r}$; on a donc la relation

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Cette formule générale permettra de résoudre les mêmes problèmes que précédemment.

Applications :

1° On donne $a=1000$, $n=20$, $r=0,05$. Calculer A.

On a $\log(1+r)=0,021189$

$$\log(1+r)^n=0,4238; \qquad (1+r)^n-1=1,654,$$

d'où le calcul

$$\begin{aligned} \log a &= 3,0000 \\ \log (1+r)^n-1 &= 0,2185 \\ \text{colog}\, r &= 1,3010 \\ \text{colog}\,(1+r)^n &= \bar{1},5762 \\ \hline \log A &= 4,0957 \qquad A = 12460^{\text{fr}}. \end{aligned}$$

2° On donne $A=10000$, $n=20$, $r=0,05$. Calculer a.
On a ici :

$$\begin{aligned} \log A &= 4,0000 \\ \log (1+r)^n &= 0,4238 \\ \log r &= \bar{2},6990 \\ \text{colog}\,\big((1+r)^n-1\big) &= \bar{1},7815 \\ \hline \log a &= 2,9043 \qquad a = 802^{\text{fr}},20. \end{aligned}$$

3° On donne $A=10000$, $a=1000$, $r=0,05$. Calculer n.

On a :

$$(a-\mathrm{A}r)(1+r)^n=a;$$

il faut donc d'abord avoir $a-\mathrm{A}r>0$; alors il vient :

$$\log(a-\mathrm{A}r)+n\log(1+r)=\log a,$$

d'où

$$n=\frac{\log a-\log(a-\mathrm{A}r)}{\log(1+r)}.$$

Ici on trouve $\mathrm{A}r=500,$

$$a-\mathrm{A}r=500;$$

$$\log a-\log(a-\mathrm{A}r)=0{,}3010;$$

$$\log(1+r)=0{,}0212;$$

et par suite n est compris entre 14 et 15.

4° On donne $\mathrm{A}=10000$, $a=1000$, $n=15$. Calculer r.

On a :

$$\frac{\mathrm{A}}{a}=\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n},$$

et le second membre diminue évidemment quand r augmente, d'après la nature de la question, car, si le taux augmente, l'annuité augmente, A et n restant fixes.

On essaiera donc diverses valeurs pour r, et on arrivera à comprendre r entre deux valeurs aussi rapprochées l'une de l'autre qu'on voudra.

Ici $\frac{\mathrm{A}}{a}=10.$

Essayons $r=0{,}05$; on trouve $\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}=10{,}3\ldots$; donc 0,05 est trop faible.

Essayons $r=0{,}0525$; on trouve pour valeur de $\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}$, $10{,}2\ldots$; donc cette valeur de r est encore trop faible.

Pour $r=0{,}0575$, on trouve $\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}=9{,}8\ldots$; donc cette valeur de r est trop forte.

Enfin, pour $r = 0{,}055$, on trouve $\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} = 10{,}03\ldots$;
donc r est compris entre 0,055 et 0,0575, et très voisin de la première valeur.

Exercices

1. — Une personne en mourant laisse 5300 francs qui ne doivent être partagés entre les héritiers que dans 25 ans; quelle sera la somme à partager si les intérêts sont capitalisés tous les ans au taux de 3 °/₀ l'an?

2. — Combien de temps un capital doit-il être placé à intérêts composés au taux de 5 °/₀ l'an pour acquérir une valeur double?

3. — Même question pour le taux de 4 °/₀.

4. — Même question pour le taux de 3 °/₀.

5. — A quel taux un capital doit-il être placé à intérêts composés pour acquérir une valeur double en 20 ans?

6. — Même question pour un capital qui doit se décupler en 50 ans.

7. — Une ville a une population de 20000 âmes, et sa population s'augmente du $\frac{1}{10}$ de sa valeur tous les trois ans; quelle était sa population il y a 30 ans?

8. — Dans combien de temps la population de cette ville serait-elle décuplée?

9. — Une personne emprunte 1200 francs pour 6 ans, et souscrit en échange une obligation de 1600 francs échéant à la même époque; à quel taux emprunte-t-elle?

10. — Quelle annuité faut-il verser annuellement pour constituer un capital de 100000 francs au bout de 21 ans, le taux de l'intérêt étant 3 °/₀?

11. — Quelle annuité faut-il verser pour éteindre une dette de 100000 francs au bout de 25 ans, le taux de l'intérêt étant 4 °/₀?

12. — Un employé verse chaque année à une caisse de retraites 5 °/₀ de son traitement qui est de 6500 francs; à quel capital aurait-il droit au bout de 30 ans, en supposant le taux de l'intérêt égal à 3 °/₀?

13. — Dans les mêmes conditions, la valeur acquise par les versements est de 60000 francs; à quel taux les intérêts ont-ils été capitalisés?

14. — Une société d'assurances qui donne à 4 °/₀ propose de payer à quelqu'un une rente de 4000 francs pour un capital de 69000 francs placé à fonds perdu; quelle est la durée de la vie probable de cette personne?

15. — On éteint une dette de 100000 francs à l'aide de 20 annuités de 8000 francs chacune : quel est le taux de l'intérêt?

16. — On éteint une dette de 100000 francs à l'aide d'annuités de 8000 francs chacune; combien faudra-t-il de telles annuités, si le taux de l'intérêt est 6 °/₀?

17. — La dette de la France est d'environ 35 milliards; quelle annuité faudrait-il verser pour l'éteindre en 1000 ans, au taux de 3 °/₀?

18. — Quelle est l'annuité a à payer semestriellement pour éteindre une dette A en n années, le taux de l'intérêt étant 5 °/₀ l'an?

Calculer a pour $A = 50000$ francs, $n = 50$.

19. — Dans les mêmes conditions calculer A pour $a = 1000$, $n = 30$.

20. — Dans les mêmes conditions, calculer n pour

$$A = 100000 \text{ francs}; \quad a = 5000 \text{ francs}.$$

TABLE I

TABLE DES LOGARITHMES

DES NOMBRES

avec Quatre décimales

N	0	1	2	3	4
10	0000	0043	0086	0128	0170
11	0414	0453	0492	0531	0569
12	0792	0828	0864	0899	0934
13	1139	1173	1206	1239	1271
14	1461	1492	1523	1553	1584
15	1761	1790	1818	1847	1875
16	2041	2068	2095	2122	2148
17	2304	2330	2355	2380	2405
18	2553	2577	2601	2625	2648
19	2788	2810	2833	2856	2878
20	3010	3032	3054	3075	3096
21	3222	3243	3263	3284	3304
22	3424	3444	3464	3483	3502
23	3617	3636	3655	3674	3692
24	3802	3820	3838	3856	3874
25	3979	3997	4014	4031	4048
26	4150	4166	4183	4200	4216
27	4314	4330	4346	4362	4378
28	4472	4487	4502	4518	4533
29	4624	4639	4654	4669	4683
30	4771	4786	4800	4814	4829
31	4914	4928	4942	4955	4969
32	5051	5065	5079	5092	5105
33	5185	5198	5211	5224	5237
34	5315	5328	5340	5353	5366
35	5441	5453	5465	5478	5490
36	5563	5575	5587	5599	5611
37	5682	5694	5705	5717	5729
38	5798	5809	5821	5832	5843
39	5911	5922	5933	5944	5955
40	6021	6031	6042	6053	6064

N	5	6	7	8	9
10	0212	0253	0294	0334	0374
11	0607	0645	0682	0719	0755
12	0969	1004	1038	1072	1106
13	1303	1335	1367	1399	1430
14	1614	1644	1673	1703	1732
15	1903	1931	1959	1987	2014
16	2175	2201	2227	2253	2279
17	2430	2455	2480	2504	2529
18	2672	2695	2718	2742	2765
19	2900	2923	2945	2967	2989
20	3118	3139	3160	3181	3201
21	3324	3345	3365	3385	3404
22	3522	3541	3560	3579	3598
23	3711	3729	3747	3766	3784
24	3892	3909	3927	3945	3962
25	4065	4082	4099	4116	4133
26	4232	4249	4265	4281	4298
27	4393	4409	4425	4440	4456
28	4548	4564	4579	4594	4609
29	4698	4713	4728	4742	4757
30	4843	4857	4871	4886	4900
31	4983	4997	5011	5024	5038
32	5119	5132	5145	5159	5172
33	5250	5263	5276	5289	5302
34	5378	5391	5403	5416	5428
35	5502	5514	5527	5539	5551
36	5623	5635	5647	5658	5670
37	5740	5752	5763	5775	5786
38	5855	5866	5877	5888	5899
39	5966	5977	5988	5999	6010
40	6075	6085	6096	6107	6117

N	0	1	2	3	4
40	6021	6031	6042	6053	6064
41	6128	6138	6149	6160	6170
42	6232	6243	6253	6263	6274
43	6335	6345	6355	6365	6375
44	6435	6444	6454	6464	6474
45	6532	6542	6551	6561	6571
46	6628	6637	6646	6656	6665
47	6721	6730	6739	6749	6758
48	6812	6821	6830	6839	6848
49	6902	6911	6920	6928	6937
50	6990	6998	7007	7016	7024
51	7076	7084	7093	7101	7110
52	7160	7168	7177	7185	7193
53	7243	7251	7259	7267	7275
54	7324	7332	7340	7348	7356
55	7404	7412	7419	7427	7435
56	7482	7490	7497	7505	7513
57	7559	7566	7574	7582	7589
58	7634	7642	7649	7657	7664
59	7709	7716	7723	7731	7738
60	7782	7789	7796	7803	7810
61	7853	7860	7868	7875	7882
62	7924	7931	7938	7945	7952
63	7993	8000	8007	8014	8021
64	8062	8069	8075	8082	8089
65	8129	8136	8142	8149	8156
66	8195	8202	8209	8215	8222
67	8261	8267	8274	8280	8287
68	8325	8331	8338	8344	8351
69	8388	8395	8401	8407	8414
70	8451	8457	8463	8470	8476

N	5	6	7	8	9
40	6075	6085	6096	6107	6117
41	6180	6191	6201	6212	6222
42	6284	6294	6304	6314	6325
43	6385	6395	6405	6415	6425
44	6484	6493	6503	6513	6522
45	6580	6590	6599	6609	6618
46	6675	6684	6693	6702	6712
47	6767	6776	6785	6794	6803
48	6857	6866	6875	6884	6893
49	6946	6955	6964	6972	6981
50	7033	7042	7050	7059	7067
51	7118	7126	7135	7143	7152
52	7202	7210	7218	7226	7235
53	7284	7292	7300	7308	7316
54	7364	7372	7380	7388	7396
55	7443	7451	7459	7466	7474
56	7520	7528	7536	7543	7551
57	7597	7604	7612	7619	7627
58	7672	7679	7686	7694	7701
59	7745	7752	7760	7767	7774
60	7818	7825	7832	7839	7846
61	7889	7896	7903	7910	7917
62	7959	7966	7973	7980	7987
63	8028	8035	8041	8048	8055
64	8096	8102	8109	8116	8122
65	8162	8169	8176	8182	8189
66	8228	8235	8241	8248	8254
67	8293	8299	8306	8312	8319
68	8357	8363	8370	8376	8382
69	8420	8426	8432	8439	8445
70	8482	8488	8494	8500	8506

N	0	1	2	3	4
70	8451	8457	8463	8470	8476
71	8513	8519	8525	8531	8537
72	8573	8579	8585	8591	8597
73	8633	8639	8645	8651	8657
74	8692	8698	8704	8710	8716
75	8751	8756	8762	8768	8774
76	8808	8814	8820	8825	8831
77	8865	8871	8876	8882	8887
78	8921	8927	8932	8938	8943
79	8976	8982	8987	8993	8998
80	9031	9036	9042	9047	9053
81	9085	9090	9096	9101	9106
82	9138	9143	9149	9154	9159
83	9191	9196	9201	9206	9212
84	9243	9248	9253	9258	9263
85	9294	9299	9304	9309	9315
86	9345	9350	9355	9360	9365
87	9395	9400	9405	9410	9415
88	9445	9450	9455	9460	9465
89	9494	9499	9504	9509	9513
90	9542	9547	9552	9557	9562
91	9590	9595	9600	9605	9609
92	9638	9643	9647	9652	9657
93	9685	9689	9694	9699	9703
94	9731	9736	9741	9745	9750
95	9777	9782	9786	9791	9795
96	9823	9827	9832	9836	9841
97	9868	9872	9877	9881	9886
98	9912	9917	9921	9926	9930
99	9956	9961	9965	9969	9974

N	5	6	7	8	9
70	8482	8488	8494	8500	8506
71	8543	8549	8555	8561	8567
72	8603	8609	8615	8621	8627
73	8663	8669	8675	8681	8686
74	8722	8727	8733	8739	8745
75	8779	8785	8791	8797	8802
76	8837	8842	8848	8854	8859
77	8893	8899	8904	8910	8915
78	8949	8954	8960	8965	8971
79	9004	9009	9015	9020	9025
80	9058	9063	9069	9074	9079
81	9112	9117	9122	9128	9133
82	9165	9170	9175	9180	9186
83	9217	9222	9227	9232	9238
84	9269	9274	9279	9284	9289
85	9320	9325	9330	9335	9340
86	9370	9375	9380	9385	9390
87	9420	9425	9430	9435	9440
88	9469	9474	9479	9484	9489
89	9518	9523	9528	9533	9538
90	9566	9571	9576	9581	9586
91	9614	9619	9624	9628	9633
92	9661	9666	9671	9675	9680
93	9708	9713	9717	9722	9727
94	9754	9759	9763	9768	9773
95	9800	9805	9809	9814	9818
96	9845	9850	9854	9859	9863
97	9890	9894	9899	9903	9908
98	9934	9939	9943	9948	9952
99	9978	9983	9987	9991	9996

TABLE II

TABLE D'ANTILOGARITHMES

avec Quatre décimales

L	0	1	2	3	4
00	1000	1002	1005	1007	1009
01	1023	1026	1028	1030	1033
02	1047	1050	1052	1054	1057
03	1072	1074	1076	1079	1081
04	1096	1099	1102	1104	1107
05	1122	1125	1127	1130	1132
06	1148	1151	1153	1156	1159
07	1175	1178	1180	1183	1186
08	1202	1205	1208	1211	1213
09	1230	1233	1236	1239	1242
10	1259	1262	1265	1268	1271
11	1288	1291	1294	1297	1300
12	1318	1321	1324	1327	1330
13	1349	1352	1355	1358	1361
14	1380	1384	1387	1390	1393
15	1413	1416	1419	1422	1426
16	1445	1449	1452	1455	1459
17	1479	1483	1486	1489	1493
18	1514	1517	1521	1524	1528
19	1549	1552	1556	1560	1563
20	1585	1589	1592	1596	1600
21	1622	1626	1629	1633	1637
22	1660	1663	1667	1671	1675
23	1698	1702	1706	1710	1714
24	1738	1742	1746	1750	1754
25	1778	1782	1786	1791	1795
26	1820	1824	1828	1832	1837
27	1862	1866	1871	1875	1879
28	1905	1910	1914	1919	1923
29	1950	1954	1959	1963	1968
30	1995	2000	2004	2009	2014
31	2042	2046	2051	2056	2061
32	2089	2094	2099	2104	2109
33	2138	2143	2148	2153	2158

L	5	6	7	8	9
00	1012	1014	1016	1019	1021
01	1035	1038	1040	1042	1045
02	1059	1062	1064	1067	1069
03	1084	1086	1089	1091	1094
04	1109	1112	1114	1117	1119
05	1135	1138	1140	1143	1146
06	1161	1164	1167	1169	1172
07	1189	1191	1194	1197	1199
08	1216	1219	1222	1225	1227
09	1245	1247	1250	1253	1256
10	1274	1276	1279	1282	1285
11	1303	1306	1309	1312	1315
12	1334	1337	1340	1343	1346
13	1365	1368	1371	1374	1377
14	1396	1400	1403	1406	1409
15	1429	1432	1435	1439	1442
16	1462	1466	1469	1472	1476
17	1496	1500	1503	1507	1510
18	1531	1535	1538	1542	1545
19	1567	1570	1574	1578	1581
20	1603	1607	1611	1614	1618
21	1641	1644	1648	1652	1656
22	1679	1683	1687	1690	1694
23	1718	1722	1726	1730	1734
24	1758	1762	1766	1770	1774
25	1799	1803	1807	1811	1816
26	1841	1845	1849	1854	1858
27	1884	1888	1892	1897	1901
28	1928	1932	1936	1941	1945
29	1972	1977	1982	1986	1991
30	2018	2023	2028	2032	2037
31	2065	2070	2075	2080	2084
32	2113	2118	2123	2128	2133
33	2163	2168	2173	2178	2183

L	0	1	2	3	4
33	2138	2143	2148	2153	2158
34	2188	2193	2198	2203	2208
35	2239	2244	2249	2254	2259
36	2291	2296	2301	2307	2312
37	2344	2350	2355	2360	2366
38	2399	2404	2410	2415	2421
39	2455	2460	2466	2472	2477
40	2512	2518	2523	2529	2535
41	2570	2576	2582	2588	2594
42	2630	2636	2642	2649	2655
43	2692	2698	2704	2710	2716
44	2754	2761	2767	2773	2780
45	2818	2825	2831	2838	2844
46	2884	2891	2897	2904	2911
47	2951	2958	2965	2972	2979
48	3020	3027	3034	3041	3048
49	3090	3097	3105	3112	3119
50	3162	3170	3177	3184	3192
51	3236	3243	3251	3258	3266
52	3311	3319	3327	3334	3342
53	3388	3396	3404	3412	3420
54	3467	3475	3483	3491	3499
55	3548	3556	3565	3573	3581
56	3631	3639	3648	3656	3664
57	3715	3724	3733	3741	3750
58	3802	3811	3819	3828	3837
59	3890	3899	3908	3917	3926
60	3981	3990	3999	4009	4018
61	4074	4083	4093	4102	4111
62	4169	4178	4188	4198	4207
63	4266	4276	4285	4295	4305
64	4365	4375	4385	4395	4406
65	4467	4477	4487	4498	4508
66	4571	4581	4592	4603	4613

L	5	6	7	8	9
33	2163	2168	2173	2178	2183
34	2213	2218	2223	2228	2234
35	2265	2270	2275	2280	2286
36	2317	2323	2328	2333	2339
37	2371	2377	2382	2388	2393
38	2427	2432	2438	2443	2449
39	2483	2489	2495	2500	2506
40	2541	2547	2553	2559	2564
41	2600	2606	2612	2618	2624
42	2661	2667	2673	2679	2685
43	2723	2729	2735	2742	2748
44	2786	2793	2799	2805	2812
45	2851	2858	2864	2871	2877
46	2917	2924	2931	2938	2944
47	2985	2992	2999	3006	3013
48	3055	3062	3069	3076	3083
49	3126	3133	3141	3148	3155
50	3199	3206	3214	3221	3228
51	3273	3281	3289	3296	3304
52	3350	3357	3365	3373	3381
53	3428	3436	3443	3451	3459
54	3508	3516	3524	3532	3540
55	3589	3597	3606	3614	3622
56	3673	3681	3690	3698	3707
57	3758	3767	3776	3784	3793
58	3846	3855	3864	3873	3882
59	3936	3945	3954	3963	3972
60	4027	4036	4046	4055	4064
61	4121	4130	4140	4150	4159
62	4217	4227	4236	4246	4256
63	4315	4325	4335	4345	4355
64	4416	4426	4436	4446	4457
65	4519	4529	4539	4550	4560
66	4624	4634	4645	4656	4667

L	0	1	2	3	4
66	4571	4581	4592	4603	4613
67	4677	4688	4699	4710	4721
68	4786	4797	4808	4819	4831
69	4898	4909	4920	4932	4943
70	5012	5023	5035	5047	5058
71	5129	5140	5152	5164	5176
72	5248	5260	5272	5284	5297
73	5370	5383	5395	5408	5420
74	5495	5508	5521	5534	5546
75	5623	5636	5649	5662	5675
76	5754	5768	5781	5794	5808
77	5888	5902	5916	5929	5943
78	6026	6039	6053	6067	6081
79	6166	6180	6194	6209	6223
80	6310	6324	6339	6353	6368
81	6457	6471	6486	6501	6516
82	6607	6622	6637	6653	6668
83	6761	6776	6792	6808	6823
84	6918	6934	6950	6966	6982
85	7079	7096	7112	7129	7145
86	7244	7261	7278	7295	7311
87	7413	7430	7447	7464	7482
88	7586	7603	7621	7638	7656
89	7762	7780	7798	7816	7834
90	7943	7962	7980	7998	8017
91	8128	8147	8166	8185	8204
92	8318	8337	8356	8375	8395
93	8511	8531	8551	8570	8590
94	8710	8730	8750	8770	8790
95	8913	8933	8954	8974	8995
96	9120	9141	9162	9183	9204
97	9333	9354	9376	9397	9419
98	9550	9572	9594	9616	9638
99	9772	9795	9817	9840	9863

L	5	6	7	8	9
66	4624	4634	4645	4656	4667
67	4732	4742	4753	4764	4775
68	4842	4853	4864	4875	4887
69	4955	4966	4977	4989	5000
70	5070	5082	5093	5105	5117
71	5188	5200	5212	5224	5236
72	5309	5321	5333	5346	5358
73	5433	5445	5458	5470	5483
74	5559	5572	5585	5598	5610
75	5689	5702	5715	5728	5741
76	5821	5834	5848	5861	5875
77	5957	5970	5984	5998	6012
78	6095	6109	6124	6138	6152
79	6237	6252	6266	6281	6295
80	6383	6397	6412	6427	6442
81	6531	6546	6561	6577	6592
82	6683	6699	6714	6730	6745
83	6839	6855	6871	6887	6902
84	6998	7015	7031	7047	7063
85	7161	7178	7194	7211	7228
86	7328	7345	7362	7379	7396
87	7499	7516	7534	7551	7568
88	7674	7691	7709	7727	7745
89	7852	7870	7889	7907	7925
90	8035	8054	8072	8091	8110
91	8222	8241	8260	8279	8299
92	8414	8433	8453	8472	8492
93	8610	8630	8650	8670	8690
94	8810	8831	8851	8872	8892
95	9016	9036	9057	9078	9099
96	9226	9247	9268	9290	9311
97	9441	9462	9484	9506	9528
98	9661	9683	9705	9727	9750
99	9886	9908	9931	9954	9977

TABLE III

TABLE DES LOGARITHMES

DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

DES ANGLES DE 0° A 90°

avec Quatre décimales

0° à 5°

A	Sinus	$\frac{1}{\text{Sinus}}$	Tang	$\frac{1}{\text{Tang}}$	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$	Cosinus	
0°	—∞	∞	—∞	∞	0,0000	0,0000	**90°**
10′	$\bar{3}$,4637	2,5363	$\bar{3}$,4637	2,5363	0,0000	0,0000	50′
20′	$\bar{3}$,7648	2,2352	$\bar{3}$,7648	2,2352	0,0000	0,0000	40′
30′	$\bar{3}$,9408	2,0592	$\bar{3}$,9409	2,0591	0,0000	0,0000	30′
40′	$\bar{2}$,0658	1,9342	$\bar{2}$,0658	1,9342	0,0000	0,0000	20′
50′	$\bar{2}$,1627	1,8373	$\bar{2}$,1627	1,8373	0,0000	0,0000	10′
1°	$\bar{2}$,2419	1,7581	$\bar{2}$,2419	1,7581	0,0001	$\bar{1}$,9999	**89°**
10′	$\bar{2}$,3088	1,6912	$\bar{2}$,3089	1,6911	0,0001	$\bar{1}$,9999	50′
20′	$\bar{2}$,3668	1,6332	$\bar{2}$,3669	1,6331	0,0001	$\bar{1}$,9999	40′
30′	$\bar{2}$,4179	1,5821	$\bar{2}$,4181	1,5819	0,0001	$\bar{1}$,9999	30′
40′	$\bar{2}$,4637	1,5363	$\bar{2}$,4638	1,5362	0,0002	$\bar{1}$,9998	20′
50′	$\bar{2}$,5050	1,4950	$\bar{2}$,5053	1,4947	0,0002	$\bar{1}$,9998	10′
2°	$\bar{2}$,5428	1,4572	$\bar{2}$,5431	1,4569	0,0003	$\bar{1}$,9997	**88°**
10′	$\bar{2}$,5776	1,4224	$\bar{2}$,5779	1,4221	0,0003	$\bar{1}$,9997	50′
20′	$\bar{2}$,6097	1,3903	$\bar{2}$,6101	1,3899	0,0004	$\bar{1}$,9996	40′
30′	$\bar{2}$,6397	1,3603	$\bar{2}$,6401	1,3599	0,0004	$\bar{1}$,9996	30′
40′	$\bar{2}$,6677	1,3323	$\bar{2}$,6682	1,3318	0,0005	$\bar{1}$,9995	20′
50′	$\bar{2}$,6940	1,3060	$\bar{2}$,6945	1,3055	0,0005	$\bar{1}$,9995	10′
3°	$\bar{2}$,7188	1,2812	$\bar{2}$,7194	1,2806	0,0006	$\bar{1}$,9994	**87°**
10′	$\bar{2}$,7423	1,2577	$\bar{2}$,7429	1,2571	0,0007	$\bar{1}$,9993	50′
20′	$\bar{2}$,7645	1,2355	$\bar{2}$,7652	1,2348	0,0007	$\bar{1}$,9993	40′
30′	$\bar{2}$,7857	1,2143	$\bar{2}$,7865	1,2135	0,0008	$\bar{1}$,9992	30′
40′	$\bar{2}$,8059	1,1941	$\bar{2}$,8067	1,1933	0,0009	$\bar{1}$,9991	20′
50′	$\bar{2}$,8251	1,1749	$\bar{2}$,8261	1,1739	0,0010	$\bar{1}$,9990	10′
4°	$\bar{2}$,8436	1,1564	$\bar{2}$,8446	1,1554	0,0011	$\bar{1}$,9989	**86°**
10′	$\bar{2}$,8613	1,1387	$\bar{2}$,8624	1,1376	0,0011	$\bar{1}$,9989	50′
20′	$\bar{2}$,8783	1,1217	$\bar{2}$,8795	1,1205	0,0012	$\bar{1}$,9988	40′
30′	$\bar{2}$,8946	1,1054	$\bar{2}$,8960	1,1040	0,0013	$\bar{1}$,9987	30′
40′	$\bar{2}$,9104	1,0896	$\bar{2}$,9118	1,0882	0,0014	$\bar{1}$,9986	20′
50′	$\bar{2}$,9256	1,0744	$\bar{2}$,9272	1,0728	0,0015	$\bar{1}$,9985	10′
5°	$\bar{2}$,9403	1,0597	$\bar{2}$,9420	1,0580	0,0017	$\bar{1}$,9983	**85°**
	Cosinus	$\frac{1}{\text{Cosinus}}$	$\frac{1}{\text{Tang}}$	Tang	$\frac{1}{\text{Sinus}}$	Sinus	A

85° à 90°

5° à 10°

A	Sinus	1/Sinus	Tang	1/Tang	1/Cosinus	Cosinus	
					0,	1̄,	
5°	2̄,9403	1,0597	2̄,9420	1,0580	0017	9983	85°
10′	2̄,9545	1,0455	2̄,9563	1,0437	0018	9982	50′
20′	2̄,9682	1,0318	2̄,9701	1,0299	0019	9981	40′
30′	2̄,9816	1,0184	2̄,9836	1,0164	0020	9980	30′
40′	2̄,9945	1,0055	2̄,9966	1,0034	0021	9979	20′
50′	1̄,0070	0,9930	1̄,0093	0,9907	0023	9977	10′
6°	1̄,0192	0,9808	1̄,0216	0,9784	0024	9976	84°
10′	1̄,0311	0,9689	1̄,0336	0,9664	0025	9975	50′
20′	1̄,0426	0,9574	1̄,0453	0,9547	0027	9973	40′
30′	1̄,0539	0,9461	1̄,0567	0,9433	0028	9972	30′
40′	1̄,0648	0,9352	1̄,0678	0,9322	0029	9971	20′
50′	1̄,0755	0,9245	1̄,0786	0,9214	0031	9969	10′
7°	1̄,0859	0,9141	1̄,0891	0,9109	0032	9968	83°
10′	1̄,0961	0,9039	1̄,0995	0,9005	0034	9966	50′
20′	1̄,1060	0,8940	1̄,1096	0,8904	0036	9964	40′
30′	1̄,1157	0,8843	1̄,1194	0,8806	0037	9963	30′
40′	1̄,1252	0,8748	1̄,1291	0,8709	0039	9961	20′
50′	1̄,1345	0,8655	1̄,1385	0,8615	0041	9959	10′
8°	1̄,1436	0,8564	1̄,1478	0,8522	0042	9958	82°
10′	1̄,1525	0,8475	1̄,1569	0,8431	0044	9956	50′
20′	1̄,1612	0,8388	1̄,1658	0,8342	0046	9954	40′
30′	1̄,1697	0,8303	1̄,1745	0,8255	0048	9952	30′
40′	1̄,1781	0,8219	1̄,1831	0,8169	0050	9950	20′
50′	1̄,1863	0,8137	1̄,1915	0,8085	0052	9948	10′
9°	1̄,1943	0,8057	1̄,1997	0,8003	0054	9946	81°
10′	1̄,2022	0,7978	1̄,2078	0,7922	0056	9944	50′
20′	1̄,2100	0,7900	1̄,2158	0,7842	0058	9942	40′
30′	1̄,2176	0,7824	1̄,2236	0,7764	0060	9940	30′
40′	1̄,2251	0,7749	1̄,2313	0,7687	0062	9938	20′
50′	1̄,2324	0,7676	1̄,2389	0,7611	0064	9936	10′
10°	1̄,2397	0,7603	1̄,2463	0,7537	0066	9934	80°
					0,	1̄,	
	Cosinus	1/Cosinus	1/Tang	Tang	1/Sinus	Sinus	A

80° à 85°

10° à 15°

A	Sinus	1/Sinus	Tang	1/Tang	1/Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
10°	2397	7603	2463	7537	0066	9934	**80°**
10′	2468	7532	2536	7464	0069	9931	50′
20′	2538	7462	2609	7391	0071	9929	40′
30′	2606	7394	2680	7320	0073	9927	30′
40′	2674	7326	2750	7250	0076	9924	20′
50′	2740	7260	2819	7181	0078	9922	10′
11°	2806	7194	2887	7113	0081	9919	**79°**
10′	2870	7130	2953	7047	0083	9917	50′
20′	2934	7066	3020	6980	0086	9914	40′
30′	2997	7003	3085	6915	0088	9912	30′
40′	3058	6942	3149	6851	0091	9909	20′
50′	3119	6881	3212	6788	0093	9907	10′
12°	3179	6821	3275	6725	0096	9904	**78°**
10′	3238	6762	3336	6664	0099	9901	50′
20′	3296	6704	3397	6603	0101	9899	40′
30′	3353	6647	3458	6542	0104	9896	30′
40′	3410	6590	3517	6483	0107	9893	20′
50′	3466	6534	3576	6424	0110	9890	10′
13°	3521	6479	3634	6366	0113	9887	**77°**
10′	3575	6425	3691	6309	0116	9884	50′
20′	3629	6371	3748	6252	0119	9881	40′
30′	3682	6318	3804	6196	0122	9878	30′
40′	3734	6266	3859	6141	0125	9875	20′
50′	3786	6214	3914	6086	0128	9872	10′
14°	3837	6163	3968	6032	0131	9869	**76°**
10′	3887	6113	4021	5979	0134	9866	50′
20′	3937	6063	4074	5926	0137	9863	40′
30′	3986	6014	4127	5873	0141	9859	30′
40′	4035	5965	4178	5822	0144	9856	20′
50′	4083	5917	4230	5770	0147	9853	10′
15°	4130	5870	4281	5719	0151	9849	**75°**
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1/Cosinus	1/Tang	Tang	1/Sinus	Sinus	A

75° à 80°

15° à 20°

A	Sinus	1/Sinus	Tang	1/Tang	1/Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
15°	4130	5870	4281	5719	0151	9849	**75°**
10′	4177	5823	4331	5669	0154	9846	50′
20′	4223	5777	4381	5619	0157	9843	40′
30′	4269	5731	4430	5570	0161	9839	30′
40′	4314	5686	4479	5521	0164	9836	20′
50′	4359	5641	4527	5473	0168	9832	10′
16°	4403	5597	4575	5425	0172	9828	**74°**
10′	4447	5553	4622	5378	0175	9825	50′
20′	4491	5509	4669	5331	0179	9821	40′
30′	4533	5467	4716	5284	0183	9817	30
40′	4576	5424	4762	5238	0186	9814	20′
50′	4618	5382	4808	5192	0190	9810	10′
17°	4659	5341	4853	5147	0194	9806	**73°**
10′	4700	5300	4898	5102	0198	9802	50′
20′	4741	5259	4943	5057	0202	9798	40′
30′	4781	5219	4987	5013	0206	9794	30′
40′	4821	5179	5031	4969	0210	9790	20′
50′	4861	5139	5075	4925	0214	9786	10′
18°	4900	5100	5118	4882	0218	9782	**72°**
10′	4939	5061	5161	4839	0222	9778	50′
20′	4977	5023	5203	4797	0226	9774	40′
30′	5015	4985	5245	4755	0230	9770	30′
40′	5052	4948	5287	4713	0235	9765	20′
50′	5090	4910	5329	4671	0239	9761	10′
19°	5126	4874	5370	4630	0243	9757	**71°**
10′	5163	4837	5411	4589	0248	9752	50′
20′	5199	4801	5451	4549	0252	9748	40′
30′	5235	4765	5491	4509	0257	9743	30′
40′	5270	4730	5531	4469	0261	9739	20′
50′	5306	4694	5571	4429	0266	9734	10′
20°	5341	4659	5611	4389	0270	9730	**70°**
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1/Cosinus	1/Tang	Tang	1/Sinus	Sinus	A

70° à 75°

20° à 25°

A	Sinus	1/Sinus	Tang	1/Tang	1/Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
20°	5341	4659	5611	4389	0270	9730	**70°**
10′	5375	4625	5650	4350	0275	9725	50′
20′	5409	4591	5689	4311	0279	9721	40′
30′	5443	4557	5727	4273	0284	9716	30′
40′	5477	4523	5766	4234	0289	9711	20′
50′	5510	4490	5804	4196	0294	9706	10′
21°	5543	4457	5842	4158	0298	9702	**69°**
10′	5576	4424	5879	4121	0303	9697	50′
20′	5609	4391	5917	4083	0308	9692	40′
30′	5641	4359	5954	4046	0313	9687	30′
40′	5673	4327	5991	4009	0318	9682	20′
50′	5704	4296	6028	3972	0323	9677	10′
22°	5736	4264	6064	3936	0328	9672	**68°**
10′	5767	4233	6100	3900	0333	9667	50′
20′	5798	4202	6136	3864	0339	9661	40′
30′	5828	4172	6172	3828	0344	9656	30′
40′	5859	4141	6208	3792	0349	9651	20′
50′	5889	4111	6243	3757	0354	9646	10′
23°	5919	4081	6279	3721	0360	9640	**67°**
10′	5948	4052	6314	3686	0365	9635	50′
20′	5978	4022	6348	3652	0371	9629	40′
30′	6007	3993	6383	3617	0376	9624	30′
40′	6036	3964	6417	3583	0382	9618	20′
50′	6065	3935	6452	3548	0387	9613	10′
24°	6093	3907	6486	3514	0393	9607	**66°**
10′	6121	3879	6520	3480	0398	9602	50′
20′	6149	3851	6553	3447	0404	9596	40′
30′	6177	3823	6587	3413	0410	9590	30′
40′	6205	3795	6620	3380	0416	9584	20′
50′	6232	3768	6654	3346	0421	9579	10′
25°	6259	3741	6687	3313	0427	9573	**65°**
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1/Cosinus	1/Tang	Tang	1/Sinus	Sinus	A

65° à 70°

25° à 30°

A	Sinus	1/Sinus	Tang	1/Tang	1/Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
25°	6259	3741	6687	3313	0427	9573	**65°**
10′	6286	3714	6720	3280	0433	9567	50′
20′	6313	3687	6752	3248	0439	9561	40′
30′	6340	3660	6785	3215	0445	9555	30′
40′	6366	3634	6817	3183	0451	9549	20′
50′	6392	3608	6850	3150	0457	9543	10′
26°	6418	3582	6882	3118	0463	9537	**64°**
10′	6444	3556	6914	3086	0470	9530	50′
20′	6470	3530	6946	3054	0476	9524	40′
30′	6495	3505	6977	3023	0482	9518	30′
40′	6521	3479	7009	2991	0488	9512	20′
50′	6546	3454	7040	2960	0495	9505	10′
27°	6570	3430	7072	2928	0501	9499	**63°**
10′	6595	3405	7103	2897	0508	9492	50′
20′	6620	3380	7134	2866	0514	9486	40′
30′	6644	3356	7165	2835	0521	9479	30′
40′	6668	3332	7196	2804	0527	9473	20′
50′	6692	3308	7226	2774	0534	9466	10′
28°	6716	3284	7257	2743	0541	9459	**62°**
10′	6740	3260	7287	2713	0547	9453	50′
20′	6763	3237	7317	2683	0554	9446	40′
30′	6787	3213	7348	2652	0561	9439	30′
40′	6810	3190	7378	2622	0568	9432	20′
50′	6833	3167	7408	2592	0575	9425	10′
29°	6856	3144	7438	2562	0582	9418	**61°**
10′	6878	3122	7467	2533	0589	9411	50′
20′	6901	3099	7497	2503	0596	9404	40′
30′	6923	3077	7526	2474	0603	9397	30′
40′	6946	3054	7556	2444	0610	9390	20′
50′	6968	3032	7585	2415	0617	9383	10′
30°	6990	3010	7614	2386	0625	9375	**60°**
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1/Cosinus	1/Tang	Tang	1/Sinus	Sinus	A

60° à 65°

30° à 35°

A	Sinus	1 / Sinus	Tang	1 / Tang	1 / Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
30°	6990	3010	7614	2386	0625	9375	**60°**
10′	7012	2988	7644	2356	0632	9368	50′
20′	7033	2967	7673	2327	0639	9361	40′
30′	7055	2945	7701	2299	0647	9353	30′
40′	7076	2924	7730	2270	0654	9346	20′
50′	7097	2903	7759	2241	0662	9338	10′
31°	7118	2882	7788	2212	0669	9331	**59°**
10′	7139	2861	7816	2184	0677	9323	50′
20′	7160	2840	7845	2155	0685	9315	40′
30′	7181	2819	7873	2127	0692	9308	30′
40′	7201	2799	7902	2098	0700	9300	20′
50′	7222	2778	7930	2070	0708	9292	10′
32°	7242	2758	7958	2042	0716	9284	**58°**
10′	7262	2738	7986	2014	0724	9276	50′
20′	7282	2718	8014	1986	0732	9268	40′
30′	7302	2698	8042	1958	0740	9260	30′
40′	7322	2678	8070	1930	0748	9252	20′
50′	7342	2658	8097	1903	0756	9244	10′
33°	7361	2639	8125	1875	0764	9236	**57°**
10′	7380	2620	8153	1847	0772	9228	50′
20′	7400	2600	8180	1820	0781	9219	40′
30′	7419	2581	8208	1792	0789	9211	30′
40′	7438	2562	8235	1765	0797	9203	20′
50′	7457	2543	8263	1737	0806	9194	10′
34°	7476	2524	8290	1710	0814	9186	**56°**
10′	7494	2506	8317	1683	0823	9177	50′
20′	7513	2487	8344	1656	0831	9169	40′
30′	7531	2469	8371	1629	0840	9160	30′
40′	7550	2450	8398	1602	0849	9151	20′
50′	7568	2432	8425	1575	0858	9142	10′
35°	7586	2414	8452	1548	0866	9134	**55°**
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1 / Cosinus	1 / Tang	Tang	1 / Sinus	Sinus	A

55° à 60°

35° à 40°

A	Sinus	1 / Sinus	Tang	1 / Tang	1 / Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
35°	7586	2414	8452	1548	0866	9134	**55°**
10′	7604	2396	8479	1521	0875	9125	50′
20′	7622	2378	8506	1494	0884	9116	40′
30′	7640	2360	8533	1467	0893	9107	30′
40′	7657	2343	8559	1441	0902	9098	20′
50′	7675	2325	8586	1414	0911	9089	10′
36°	7692	2308	8613	1387	0920	9080	**54°**
10′	7710	2290	8639	1361	0930	9070	50′
20′	7727	2273	8666	1334	0939	9061	40′
30′	7744	2256	8692	1308	0948	9052	30′
40′	7761	2239	8718	1282	0958	9042	20′
50′	7778	2222	8745	1255	0967	9033	10′
37°	7795	2205	8771	1229	0977	9023	**53°**
10′	7811	2189	8797	1203	0986	9014	50′
20′	7828	2172	8824	1176	0996	9004	40′
30′	7844	2156	8850	1150	1005	8995	30′
40′	7861	2139	8876	1124	1015	8985	20′
50′	7877	2123	8902	1098	1025	8975	10′
38°	7893	2107	8928	1072	1035	8965	**52°**
10′	7910	2090	8954	1046	1045	8955	50′
20′	7926	2074	8980	1020	1055	8945	40′
30′	7941	2059	9006	0994	1065	8935	30′
40′	7957	2043	9032	0968	1075	8925	20′
50′	7973	2027	9058	0942	1085	8915	10′
39°	7989	2011	9084	0916	1095	8905	**51°**
10′	8004	1996	9110	0890	1105	8895	50′
20′	8020	1980	9135	0865	1116	8884	40′
30′	8035	1965	9161	0839	1126	8874	30′
40′	8050	1950	9187	0813	1136	8864	20′
50′	8066	1934	9212	0788	1147	8853	10′
40°	8081	1919	9238	0762	1157	8843	**50°**
	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1 / Cosinus	1 / Tang	Tang	1 / Sinus	Sinus	A

50° à 55°

40° à 45°

A	Sinus	1 / Sinus	Tang	1 / Tang	1 / Cosinus	Cosinus	
	$\bar{1}$,	0,	$\bar{1}$,	0,	0,	$\bar{1}$,	
40°	8081	1919	9238	0762	1157	8843	50°
10′	8096	1904	9264	0736	1168	8832	50′
20′	8111	1889	9289	0711	1179	8821	40′
30′	8125	1875	9315	0685	1190	8810	30′
40′	8140	1860	9341	0659	1200	8800	20′
50′	8155	1845	9366	0634	1211	8789	10′
41°	8169	1831	9392	0608	1222	8778	49°
10′	8184	1816	9417	0583	1233	8767	50′
20′	8198	1802	9443	0557	1244	8756	40′
30′	8213	1787	9468	0532	1255	8745	30′
40′	8227	1773	9494	0506	1267	8733	20′
50′	8241	1759	9519	0481	1278	8722	10′
42°	8255	1745	9544	0456	1289	8711	48°
10′	8269	1731	9570	0430	1301	8699	50′
20′	8283	1717	9595	0405	1312	8688	40′
30′	8297	1703	9621	0379	1324	8676	30′
40′	8311	1689	9646	0354	1335	8665	20′
50′	8324	1676	9671	0329	1347	8653	10′
43°	8338	1662	9697	0303	1359	8641	47°
10′	8351	1649	9722	0278	1371	8629	50′
20′	8365	1635	9747	0253	1382	8618	40′
30′	8378	1622	9772	0228	1394	8606	30′
40′	8391	1609	9798	0202	1406	8594	20′
50′	8405	1595	9823	0177	1418	8582	10′
44°	8418	1582	9848	0152	1431	8569	46°
10′	8431	1569	9874	0126	1443	8557	50′
20′	8444	1556	9899	0101	1455	8545	40′
30′	8457	1543	9924	0076	1468	8532	30′
40′	8469	1531	9949	0051	1480	8520	20′
50′	8482	1518	9975	0025	1493	8507	10′
45°	8495	1505	0,0000	0000	1505	8495	45°
	$\bar{1}$,	0,		0,	0,	$\bar{1}$,	
	Cosinus	1 / Cosinus	1 / Tang	Tang	1 / Sinus	Sinus	A

45° à 50°